様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 28 日現在

機関番号：14301
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2012
課題番号：23654003
研究課題名（和文）概均質ベクトル空間に関連した密度の誤差項

研究課題名（英文）Error terms of density theorems related to prehomogeneous vector spaces

研究代表者
雪江 明彦（YUKIE AKIHIKO）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20312548

研究成果の概要（和文）：概均質ベクトル空間に関連した密度定理の誤差項を求めるために解決すべき問題ははっきりしてきた．4 次体の場合には，局所軌道積分の一様評価は証明すみだが，それはまだ未発表である．誤差項の評価まで到達するためには，inclusion-exclusion principle を使うための評価がなされなければならず，それを行うためのさまざまな試行錯誤を行った．また，関連した局所理論でジョルダン分解の一般化について，いくぶん進展があった．

研究成果の概要（英文）：Problems for getting the error term of density theorems related to prehomogeneous vector spaces became clearer. In the quartic case, we have an unpublished result showing a uniform estimate of local orbital integrals. However, in order to use it to reach the error term of the density theorem, more accurate estimate has to be shown to use the inclusion-exclusion principle. For that purpose, we carried out some trial and errors. Also there is some progress in the related local theory on the generalization of the notion of Jordan decomposition.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：代数学 4701
キーワード：数論　群論

１．研究開始当初の背景

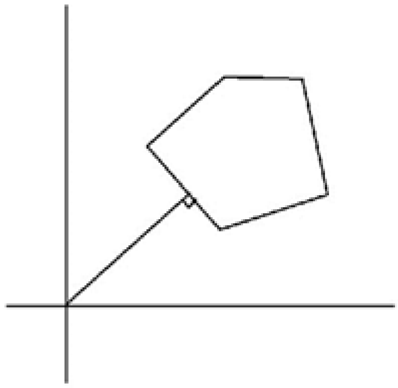
概均質ベクトル空間に関連した密度定理として古くは Davenport-Heilbronn の 3 次体の密度定理や Goldfeld-Hoffstein の 2 次体の類数の密度定理など，興味深い密度定理があった．4 次体や 5 次体に関しては Bhargava の密度定理がある．また最近の Thorne-谷口などの結果は 3 次体の場合の密度の誤差項が 5/6 次のオーダーであることを決定していて，実際のデータと非常に合うことがわかっている． しかし，それ以外の場合には誤差項についてはわかっていない．密度定理の主要項だけでは，理論的な漸近挙動とデータは判別式を 100 万くらいまで調べてもなかなか一致しないことが知られている．こういった状況を考え，なるべく多くの場合に概均質ベクトル空間の解析理論から得られる密度定理を誤差項まで含めて証明するのが望ましい．

２．研究の目的
概均質ベクトル空間に関連する密度定理については主要項について証明されていない場合も多い．そういった場合については，まず主要項だけでもよいので，密度定理を証明

するのが目的となるが，主要項が見つかっている場合については，その誤差項すべてみつけるのが目的である．もちろん，4 次体や 5 次体と関連する 3 変数 2 次形式の対の空間などの局所理論と極の考察ができて密度定理の誤差項まで決定できるのが望ましいが，それには非常に多くのことがなされねばならず，現時点では密度定理を証明するための，十分な局所理論を構築するのが研究の目的である． 具体的には, 簡単な場合である 2 次行列の対の空間や 3 変数 2 次形式の対の空間の場合の Jordan 分解の類似の概念を作ることにより，一般の場合の定式化がどうであるべきかを探る．

３．研究の方法

概均質ベクトル空間の局所軌道積分については，はっきり計算されているのは，有理軌道が 1 つしかない場合を除いて，2 変数 2 次形式の空間と 2 変数 3 次形式の空間の場合しかない. 3 変数 2 次形式の空間といった例外群と関係した比較的大きい概均質ベクトル空間の場合，もちろんその局所ゼータ積分をすべて明示的に計算できるのが望ましいが，とりあえずは一様評価を証明することが必要である．しかし，一様評価だけでは十分でなく， 誤差項も考察するためには， inclusion-exclusion principle を使うために,素点の数を多くしていって，交代和、あるいはガウス和を考えるて評価する必要がある．また，大域ゼータ関数の極は通常複数現れるが，極での主要部はテスト関数の不変 distribution となる．等質空間上の不変測度の一意性より，これらの不変 distribution は局所軌道積分の適当な値の定数倍になるはずである． ただし, 極の位数が 2 以上の場合にそれらを比較するといったことがなされたことはなく，これは課題をなっている．局所理論に戻るが，局所軌道積分の評価もごく一部の場合にしかなされていない．2 次形式の空間の場合には, Datskovsky [1] や伊吹山-斉藤 [10]，Kable-雪江 [4]，[5]，早坂-雪江 [2], [3] の仕事があるが，問題は安定化群をどう扱うかである．Datskovsky, Kable-雪江 のように，ある意味安定化群に transversal な集合をとり，局所軌道積分の定義を明示的に書いて調べるということも可能な場合があるが，安定化群が代数的トーラスではない場合にはこういった方法は難しい．そこで群上ではなく，ベクトル空間上で適当な集合をとり, Z_p 軌道のよい代表元を明示的にとってくることは評価という観点から可能性の高いものである．



そのように，ベクトル空間上で Z_p 軌道の明示的な代表元をみつけるということは 2 次形式の空間の場合には古典的な結果であり([9]), Jordan 分解とよばれているものである．一方で幾何学的不変式論(GIT)では, 不安定点の群論的に帰納的な構造を表すことは，モース理論の観点から知られている([6], [7], [8])． GIT の観点からは，Jordan 分解は Q 上安定だが，p を法として考えたとき不安定になる点を有限体上の場合に不安定点の帰納的構造を利用して調べたと解釈することができる．一般の場合には，不安定点の構造は上の図のような，weight 空間における表現の座標の weight の有限個の convex hull に一番近い点を考えることにより，分類することができる．それを p を法として有限体上で考えるということを繰り返せばよいと思われる．なお，βを上の図の原点に一番近い点とすると，これに対応する不安定点は，ベクトル空間 V の部分空間 Y,Z と G の簡約部分群 G(β) により，G と Y+Z の半安定点の集合の G(β)上のファイバー積の点である．しかし、それは一般の点なので，Y+Z すべての点を考えると, そこでまた G(β) の Y への作用を考え，再び不安定点を考えるというように繰り返す必要がある．こういった方法は 2 次形式の空間以外では試されたことがなく，まだ必ずしも成功していないが，うまくいけば, 画期的な方法となるはずである．

群の階数が 3 以下なら，weight space を視覚的にとらえることができるので，直観的な考察が可能だが，階数が 4 より大きい場合には, コンピューターによる計算を要する．

上のような方法で Z_p 軌道を決定できると，[10], [11] のように，局所ゼータ関数，あるいは局所軌道積分に関して重要な情報がわかることが期待される．

なお，このような局所理論が完成したら，大域ゼータ関数の極における留数，あるいは主要部の係数となるテスト関数の不変 distribution をアデリック軌道積分の定数倍として表し，その定数を明示的に計算することが誤差項を明示的に表すために必要となることである．そのような計算は 2 変数 3 次形式の場合に新谷によってなされた以外は主な結果な今のところない．

4 次体に関連する場合には，極の位数が 2 であるために，その計算には困難が予想されるが，それはこれからの課題である．

[1] B. Datskovsky. A mean value theorem for class numbers of quadratic extensions. Contemporary Mathematics, 143:179-242, 1993.

[2] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized tamagawa numbers of orthogonal groups I. Publ. Res. Inst. Math. Sci., 44(2):545-607, 2008.

[3] N. Hayasaka and A. Yukie. On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups. II. Amer. J. Math., 131(3):683-730, 2009.

[4] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic _elds. II. J. Math. Soc. Japan, 55(3):739-764, 2003.

[5] A.C. Kable and A. Yukie. The mean value of the product of class numbers of paired quadratic fields. III. *J. Number Theory*, 99(1):185-218, 2003.

[6] D. Mumford, J. Forgarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, Springer-Verlag, 3rd edition, 1994

[7] G. Kempf, Instability in invariant theory, Ann. Of Math., 108:299-316, 1978

[8] G. Kempf and L. Ness. The length of vectors in representation spaces. In Algebraic Geometry, Proceedings, Copenhagen, volume 732 of Lecture Notes in Mathematics, 233-242. Springer-Verlag, 1978.

[9] Y. Kitaoka. *Arithmetic of Quadratic forms*. Cambridge University Press, 1993.

[10] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices I. An explicit form of zeta functions. Amer. J. Math., 117 (5):1097-1155, 1995

[11] A. Yukie, On the density of unnormalized Tamagawa numbers of orthogonal groups III (preprint)

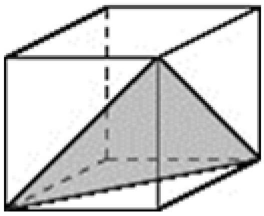
４．研究成果

まだ，論文は完成していないが，いくつかの概均質ベクトル空間の場合には，Z_p 軌道の代表元の候補はほとんど決定している．具体的には，

(1) G = GL(2) x GL(2) x GL(2), V 2 次行列の対の空間

(2) G = GL(3) x GL(2), V 3 変数 2 次形式の対の空間

の場合について考察した．特に，1 回不安定点の帰納的構造を考えただけでは十分ではなく、複数回不安定点の構造を決定する必要があることが興味深い点である．すべての場合を記述するわけではないが，例えば、(1) の場合に，次の convex hull

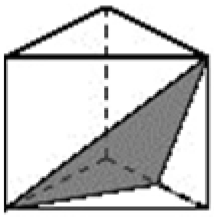


に対応する Z_p 軌道の代表元としては，n_1<n_2 を非負整数として，

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & p^{n_1}\star \\ p^{n_1}\star & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{n_1}\star & 0 \\ 0 & p^{n_2}\star \end{pmatrix} \right)$$

という形をしたものである．ここで星印は Z_p の可逆元を表す．

(2) の場合は 4 次体をパラメータ化する重要な場合である．Z_p 軌道すべてを書けるわけではないが，例えば次の convex hull



に対応する Z_p 軌道は n1<n2 を正の整数として，

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & p^{n_1}\star \\ 0 & p^{n_1}\star & 0 \\ p^{n_1}\star & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{n_1}\star & 0 & 0 \\ 0 & p^{n_2}* & p^{n_2}* \\ 0 & p^{n_2}* & p^{n_2}* \end{pmatrix} \right)$$

という形をした元で半安定であるものとなる.

この場合の局所軌道積分について現在得ている結果は，このような考察によるものではないが次の結果がある.

また，(2) の場合の局所軌道積分については、誤差項まで記述するのには十分ではないが，次の一様評価も得ている.

$\Xi_{x,v}(s)$ を有限素点 v と $x \in V_{k_v}^{ss}$ に対する局所軌道積分とする. $\Xi_{x,v}(s) = \sum a_{x,v,n} q_v^{-ns}$ とするとき，次の定理が成り立つ.

定理 (1) $n < 0$ なら $a_{x,v,n} = 0$.

(2) $a_{x,v,0} = 1$.

(3) 有限個の v を除き，x に依存しないべき級数 $L_v(s) = \sum_{l_{v,n}} q_v^{-ns}$ と $\epsilon > 0$ があり，$a_{x,v,n} \leqq l_{v,n}$ が成り立ち，$\prod_v L_v(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \geqq 1 - \epsilon$ で絶対一様収束する.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計 2 件）

① 雪江明彦 On Z_p orbits of prehomogeneous vector spaces Kyoto conference on automorphic forms 2012 年 10 月 5 日-7 日，京都大学

② 雪江明彦 Jordan 分解について 第 57 回代数シンポジウム 2012 年 8 月 20 日-23 日 数理解析研究所

６．研究組織

(1)研究代表者

雪江　明彦（YUKIE AKIHIKO）

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：20312548