

平成 26 年 6 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654006

研究課題名(和文) 頂点代数の理論の新展開

研究課題名(英文) New developments of vertex algebra theory

研究代表者

荒川 知幸 (Arakawa, Tomoyuki)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：40377974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：(1) カイラル微分作用素の asymptotic algebra の概念を導入した。その上でカイラルハミルトニアン還元法を用いて Slodowy 多様体上のカイラル微分作用素の asymptotic algebra を構成した。さらにその大域切断を計算し、それが臨界レベルの単純  $W$  代数に同型である事を示した。(桑原敏郎氏、Fyodor Malikov 氏との共同研究)  
(2) Semi-infinite restriction 関手の概念を導入し、これがアフィンリー環の"許容性"と整合的であることを示し、Kac-Wakimoto の許容表現の inductive な研究を可能にした。

研究成果の概要(英文)：(1) We have introduced the notion of an asymptotic algebra of chiral differential operators. We then have constructed, via a chiral Hamiltonian reduction, one such algebra over a resolution of the intersection of the Slodowy slice with the nilpotent cone. We compute the space of global sections of this algebra thereby proving a localization theorem for affine  $W$ -algebras at the critical level. This is a joint work with T. Kuwabara and F. Malikov.  
(2) We introduced a notion of semi-infinite restriction functor, and shows that it is compatible with admissibility of representations of affine Kac-Moody algebras, enabling an inductive study of Kac-Wakimoto admissible representations.

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：群の表現論

キーワード：頂点作用素代数 D加群 変型量子化 W代数 アーク空間

### 1. 研究開始当初の背景

Borcherds によって導入された頂点代数は理論物理学における共形場理論に起源を持つが、これまでの多くの研究により保型形式、有限群論、表現論、弦理論、ゲージ理論等の数学や物理学の様々な話題と関わりを持つことが明らかにされてきた。

頂点代数とは一種の代数系であり、したがってその層の理論が当然考えられる。実際対応する理論が Beilinson-Drinfeld や Malikov-Schechtman-Vaintrob によって導入されている。しかしその適用対象はほとんどが Kac-Moody 代数に付随する頂点代数であり、例えば最近注目を集めている AGT 予想およびその期待される一般化に現れるような複雑な頂点代数の場合に適用された例は無かった。

また、頂点代数の重要性は主にモジュラー関手、あるいはある種の良い性質を満たすテンソル圏が付随する点に起因するが、これまでモジュラー関手は頂点代数が  $C_2$  有限性条件と呼ばれる強い有限性条件を満たす場合に限って考えられてきた。しかし実際には Kac-Moody 代数の許容表現に付随する頂点代数など、 $C_2$  有限性条件を満たさないにも関わらずモジュラー性を有する例が存在する。このため今後の理論の理解と発展、応用のためには  $C_2$  有限性条件を満たさない頂点代数も扱える理論を構築することが重要だと思われる。

### 2. 研究の目的

(1) シンプレクティック多様体  $X$  を対象とし、その上の頂点代数の層であって対応する Zhu 代数の層が Kontsevich, Polesellp-Shapira, Kashiwara-Rouquier の意味での変形量子化代数の層を構成する事。

(2)  $C_2$  有限性条件を満たさない頂点代数代数を扱える理論を構築する事。

### 3. 研究の方法

本研究の内容は、頂点(作用素代数)、表現論、シンプレクティック幾何、代数幾何などと広範囲にまたがっているため、研究遂行のためには各分野の様々な研究者との交流が必要不可欠である。そのため、国内外の専門家の招聘、国際研究集会の開催、研究集会等での情報収集、海外共同研究者との綿密な議論・研究打合せのための旅費に研究経費の多くが当てられる。

研究代表者である応募者の他に、Fyodor Malikov 教授(南カルフォルニア大)と桑原敏郎研究員(ソウル大学)が海外共同研究者として研究に参加する。

共同研究者とは、普段は E メールにて議論を

行う。研究打合せは年に一、二回の割合で不定期に行う。

### 4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである。

(1) カイラル微分作用素の asymptotic algebra の概念を導入した。その上でカイラルハミルトニアン還元法を用いて Slodowy 多様体上のカイラル微分作用素の asymptotic algebra を構成した。さらにその大域切断を計算し、それが臨界レベルの単純  $W$  代数に同型である事を示した。(桑原敏郎氏、Fyodor Malikov 氏との共同研究)

(2) Semi-infinite restriction 関手の概念を導入し、この関手がアフィンリー環の"許容性"と整合的であることを示し、Kac-Wakimoto の許容表現の inductive な研究を可能にした。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

- 1) T. Arakawa, T. Kuwabara and F. Malikov) Localization of affine  $W$ -algebras, to appear in Comm. Math. Phys.
- 2) T. Arakawa,  $W$ -algebras at the critical level, Contemp. Math., 565, 1--14, 2012.
- 3) T. Arakawa, Rationality of Bershadsky-Polyakov vertex algebras, Comm. Math. Phys., October 2013, Volume 323, Issue 2, pp 627-633.
- 4) T. Arakawa, A remark on the  $C_2$ -cofiniteness condition on vertex algebras, Math. Z.
- 5) T. Arakawa, and P. Fiebig, The linkage principle for restricted critical level representations of affine Kac-Moody algebras, Compos. Math., 148, 1787--1810, 2012.
- 6) T. Arakawa and F. Malikov, A chiral Borel-Weil-Bott theorem, Adv. Math., 229 (2012) 2908-2949.
- 7) T. Arakawa and P. Fiebig, On the restricted Verma modules at the critical level, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 4683-4712.
- 8) T. Arakawa, D. Chebotarov and F. Malikov) Algebras of twisted chiral differential operators and affine localization of  $\mathfrak{g}$ -modules, Sel. Math. New Ser., vol.17, no. 1, 1-46, 2011.

- 9) T. Arakawa, Representation theory of W-algebras, II, Adv. Stud. Pure Math. 61(2011), 51--90.

[学会発表](計 22 件)

- 1) T. Arakawa, The Frenkel-Kac-Raul-Wang conjecture and quantized Drinfeld-Sokolov reduction, Hualien Workshop on Finite Groups, VOA, Algebra Combinatorics and Related Topics, National Dong Hua University, Taiwan, March 20-March 23, 2014.
- 2) T. Arakawa, Affine W-algebras and their representations, Algebra Seminar, Unicesite de Poitier, France, Dec. 9, 2013
- 3) T. Arakawa, Affine W-algebras and Vinberg's problem for centralizers, Emmy-Noether-Seminar, Erlangen, Germany, Dec 6, 2013.
- 4) T. Arakawa, W-Algebras as Generalization of Infinite-Dimensional Lie Algebra, Colloquium, Erlangen, Germany, Dec. 03, 2013.
- 5) T. Arakawa, Feigin-Frenkel center and W-algebras II, Emmy-Noether-Seminar, Erlangen, Germany, Nov. 29, 2013.
- 6) T. Arakawa, Feigin-Frenkel center and W-algebras I, Emmy-Noether-Seminar, Erlangen, Germany, Nov. 22, 2013.
- 7) T. Arakawa, W-algebras and Vinberg's problem for centralizers, Symmetries in Mathematics and Physics II in honor of Prof. Victor Kac's 70th birthday, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, 24--28 June, 2013.
- 8) T. Arakawa, W-algebras and Vinberg's problem for centralizers, Australia's national university, Australia, May 10, 2013.
- 9) T. Arakawa, Introduction to representation theory of W-algebras, a mini-course lecture, Sydney University, 22, 25, 29 April, 2, 6 May, 2013.
- 10) T. Arakawa, Affine W-algebras and Vinberg's problem for centralizers, Algebra Seminar, Sydney University, Australia 19 April, 2013.
- 11) T. Arakawa, An application of affine W-algebras, Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, Mar. 27 2013, Taitung University, Taiwan
- 12) 荒川知幸, W 代数の表現論、2013 年度 (第 16 回) 代数学賞受賞特別講演、2013 年 3 月 22 日, 京都大学.

- 13) T. Arakawa, Semi-infinite restriction functors and applications, Emmy-Noether-Seminar, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Germany, Dec. 21, 2012.

- 14) T. Arakawa, Affine W-algebras, AG-Seminar Algebra, Dec. 18, 2012, Technische Universität Darmstadt, German.

- 15) T. Arakawa, A mini-course lecture, "Representation theory of W-algebras", Tomoyuki Arakawa, Catégorie 0: géométrie et catégorification, 10-14 December 2012, CIRM, Luminy.

- 16) T. Arakawa, A mini-course lecture, "Recent development in representation theory of W-algebras", Tomoyuki Arakawa, Algebraic Structures in Integrable Systems, December 3-7, 2012, Moscow Russia.

- 17) T. Arakawa, "Rationality of W-algebras", Tomoyuki Arakawa, Conference on Vertex Operator Algebra and Related Topics August 24 - 27, 2012, Shanghai Jiao Tong University, China

- 18) T. Arakawa, Rationality of W-algebras", Tomoyuki Arakawa, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics August 20-26, 2012, Chern Institute of Mathematics Tianjin, China.

- 19) 荒川知幸, カイラルハミルトニアン構成法と表現論-W 代数をめぐる-, 日本数学会秋季総合分科会, 2011年10月1日、特別講演, 信州大学

- 20) T. Arakawa, Localization of affine W-algebras at the critical level, Perspectives in Algebraic Lie Theory, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, UK, September 15, 2011.

- 21) T. Arakawa, Localization of affine W-algebras at the critical level, Algebraic geometry and representation theory seminar, Weizmann institute, Israel, May 30, 2011.

- 22) T. Arakawa, Admissible affine vertex algebra of type A, Algebraic geometry and representation theory seminar, Weizmann institute, Israel, May 20, 2011

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:

種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~arakawa/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

荒川 知幸 (ARAKAWA, Tomoyuki )

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：40377974

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：