

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 21 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654018

研究課題名(和文)特性類の理論による有限群のコサイクルの構成

研究課題名(英文)Constructions of cocycles of finite groups by characteristic classes

研究代表者

秋田 利之(Akita, Toshiyuki)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30279252

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：有限群 G をモノドロミー群とするコンパクトRiemann面のGalois被覆に対して、被覆から定まる特性類(Mumford-Morita-Miller類)を表すコサイクルを構成した。構成には群のコホモロジーにおけるトランスファー写像、河澄・植村の公式などを用いた。また特性類の周期性およびSteenrod作用素との関係を用いることにより、被覆から定まる特性類のmod p コサイクルの族を構成した(p は素数)。さらにCoxeter群の p 局所ホモロジーが消滅するための十分条件を得た。証明ではCoxeter複体の同変ホモロジーの考察が鍵となった。

研究成果の概要(英文)：For a finite Galois covering of a compact Riemann surface with a monodromy group G , we constructed cocycles representing the characteristic classes (Mumford-Morita-Miller classes) associated with a Galois covering, by using transfer homomorphisms in group cohomology and Kawazumi-Uemura formula. In addition, we construct mod p cocycles for such classes by using "periodicity phenomena" and Steenrod operations. Moreover, we prove a vanishing theorem for p -local homology of Coxeter groups. The key ingredient was equivariant homology of Coxeter complexes.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：コサイクル 特性類 群のコホモロジー Galois被覆 Coxeter群

1. 研究開始当初の背景

低次元トポロジー(とくに量子トポロジー)、表現論、量子群とホップ代数、数理物理など数学の様々な分野で、有限群のコサイクルを具体的に構成することが求められるようになってきた。例えば3次元多様体の位相不変量である Dijkgraaf-Witten 不変量は有限群の3次コホモロジー類を用いて定義されるが、計算には3-コサイクルの具体的な表示が欠かせない。

しかしながら有限群のコホモロジーの研究においては、コサイクル表示はコホモロジーを計算するための中間的な一手段と位置づけられ、必要に応じて ad hoc に構成されることはあっても、主たる研究対象とはされてきておらず、他分野からの要請との間にギャップがあった。以上が本研究開始の背景である。

2. 研究の目的

有限群の高次のコサイクルを組織的・幾何的に構成する方法を確立することが本研究の主たる目的であった。群のコホモロジーを定めるチェイン複体(射影分解)は無数に存在するが、我々が対象としたのは「(正規化された)バー構成」という特別なチェイン複体に対するコサイクルである。

バー構成はその関手性から理論的には重要であるものの、実際の計算には向かないと考えられてきたが、数学の様々な研究対象で要請されているのはバー構成に対するコサイクルの構成である。

3. 研究の方法

コサイクルを構成するための主たる方法として、有限群および離散群の複素線型表現の特性類、多様体をファイバーとするファイバー束(多様体束)の特性類といった種々の特性類、分類空間のコホモロジーにおける通常のトランスファー写像(移送写像)および高次のトランスファー(乗法的トランスファーなど)、Lyndon-Hochschild-Serre スペクトル系列の組合せを考えていた。

研究代表者は本研究開始以前の研究で、曲面束の特性類を、線型表現の特性類と通常の transfer を用いて研究してきた。本研究はそれらのコサイクル・レベルへの精密化・一般化を含んでいると見なすことができる。また特性類と関連づけることで、構成されたコサイクルを幾何的に扱える利点もあると考えた。

本研究に関連する分野は、有限群のコホモロジー(有限群の分類空間のコホモロジー)を

中心に、代数的トポロジーと微分トポロジー、有限群の表現論、整数論など多岐にわたった。そのために関連する分野の内外の研究者との研究連絡・議論をおこなった。

4. 研究成果

本研究の成果は(1) Riemann 面の Galois 被覆に関わるもの(2) Coxeter 群のホモロジーに関わるものの二つに大別される。これまでに得られた主な結果を以下に述べる。

(1) 代表者は本研究開始以前の研究において、コンパクト Riemann 面の Galois 被覆の理論を援用して、写像類群の有限部分群の“同値類”全体を表現論的に扱う枠組みを構築しつつあった。標語的に言えば“Riemann 面の Galois 被覆の圏の K 群(Grothendieck 群)”を構成し調べていたと言ってもよいだろう。

この枠組みは特性類の研究への応用を念頭において開始したものだが、特性類を用いた有限群のコサイクルの構成、Galois 被覆の研究にも役立つと期待していた。本研究では、まず上に述べた枠組みをより精密化し、得られた結果を複数の研究集会(例えば「リーマン面に関連する位相幾何学」と Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2013 など)で講演し、分岐被覆の専門家の好評を得ている。

Riemann 面の Galois 被覆から定まる特性類の代表的なものとして Mumford、森田茂之氏、Miller の3人によって定義された Mumford-Morita-Miller 類(以下 MMM 類と略す)が挙げられるが、代表者の枠組みでは Galois 被覆の MMM 類は、被覆の圏の K 群から群のコホモロジーへの Mackey 関手として記述される。一方、河澄-植村公式は Galois 被覆の MMM 類を被覆の分岐データ(ramification data)で記述する公式である。

本研究では上記の Mackey 関手、河澄-植村公式、古典的なトランスファーを用いて、有限群 G をモノドロミー群としてもつ Galois 被覆に対して、 G の MMM 類のコサイクル表示を与えた。得られたコサイクルはかなり複雑であり、また巡回部分群の G における剰余類の代表元の選び方に依存しているという点で標準的(canonical)なものではない。より簡明で何らかの意味で標準的なコサイクルを構成するのは今後の改題である。

冒頭に述べたコサイクルとは別に、1 次 MMM 類のコサイクルとして Meyer による符号数コサイクルが知られている。我々

が構成したコサイクルと符号数コサイクルの差はコバウンダリになっていることは明らかであるものの、両者の関係は明瞭ではない。Meyer のコサイクルとの関係を露わにすることも今後の課題であろう。

また Meyer のコサイクルは Dedekind 和という数論的な数と関係している。我々の構成したコサイクルと数論的な対象との関係も期待されるが、その研究もこれからの課題として残されている。

更に代表者によって示された「 $\text{mod } p$ MMM 類の周期性」や「Steenrod 作用素の MMM 類への作用」を用いることにより、上に述べたものとは異なる $\text{mod } p$ コサイクルの族を構成した。

- (2) Coxeter 群は対称群、有限鏡映群、アフィン鏡映群、双曲空間の鏡映群などを含む重要な群のクラスである。Coxeter 群は自然な「幾何的表現 (geometric representation)」という実数体上の単射線型表現をもち、その特性類は Coxeter 群のコホモロジーを考える上で重要である。

Coxeter 群の有理数係数コホモロジーは代表者の過去の結果により自明であることがわかっており、したがって整数係数ホモロジー群は有限アーベル群となる。本研究では整数係数ホモロジー群の p -primary component (Sylow p 部分群) に焦点を当てた。その成果として一般の Coxeter 群に対して、ホモロジー群の p -primary component (p 局所ホモロジー) が自明であるための十分条件を与えた。なお、本研究終了時点で得られている十分条件は最良 (best possible) なものではないと思われる。最良な十分条件を得るのは今後の課題である。

対称群の場合は、中岡稔氏による「対称群のホモロジー安定性」と「無限対称群の $\text{mod } p$ ホモロジーの決定」の系であるが、一般の Coxeter 群に対しては類似の「消滅定理」はこれまで知られていなかった。証明では Coxeter 複体の同変ホモロジーに収束する Leray スペクトル系列の考察が鍵となった。研究成果を京都大学理学部で講演した。上記の成果をコサイクルの研究(とくに幾何的表現の特性類)に活用することも今後の研究の課題である。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Toshiyuki Akita, Periodicity for Mumford-Morita-Miller classes of surface symmetries, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **47** (2011), 897-909. 査読あり DOI:10.2977/PRIMS/55

[学会発表](計 12 件)

Toshiyuki Akita, Homology of Coxeter groups, 微分トポロジーセミナー、2014年2月14日、京都大学理学部数学教室
Yositake Hashimoto, 頂点代数に対する共形場理論におけるリーマン面の退化、代数多様体のトポロジーとその周辺、2013年8月23日、北海道大学数学教室
Toshiyuki Akita, On the p -local homology of Coxeter groups, 代数幾何セミナー、2013年7月9日、北海道大学数学教室

Toshiyuki Akita, Groups of Galois coverings of Riemann surfaces and equivariant characteristic classes, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2013, 2013年3月8日、首都大学東京南大沢キャンパス
Yositake Hashimoto, E_6 型射影不変量と Mathieu 群 M_{24} , 研究集会「多様体と幾何構造の融合」, 2013年3月5日、名城大学

Yositake Hashimoto, Geometric Satake correspondence and fusion tensor product, 香川セミナー、2012年12月8日、香川大学教育学部

Toshiyuki Akita, Groups of Galois coverings of closed oriented surfaces, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2012年9月1日、東京大学大学院数理科学研究科

Toshiyuki Akita, Surface symmetries and equivariant characteristic classes, Topology of Singularities and Related Topics III (JSPS-VAST Japan-Vietnam Bilateral Joint Projects), 2012年3月29日、University of Dalat, Dalat, Vietnam.

Yositake Hashimoto, 共形場理論の微分幾何(1)(2), 阪大-阪市大-神戸大-九大合同幾何学セミナー(第6回)(GEOSOCKセミナー「数理と物理の深化と展開」), 2012年3月14日-15日、大阪市立大学理学部

Yositake Hashimoto, 非半単純共形場理論, 研究会「量子可積分系の新展開 II」, 2011年9月13日-17日、富士教育研修所

Toshiyuki Akita, Surface symmetry and cohomology of finite groups, Seminários de Topologia, 2011年9月2日、ICMC-USP, São Carlos, Brazil.

Toshiyuki Akita, Surface symmetries

and Mackey functors, 琉球大学数学教室
談話会、2011年4月21日、琉球大学理
学部

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~akita/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

秋田 利之 (AKITA, Toshiyuki)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：30279252

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

橋本 義武 (HASHIMOTO, Yoshitake)

東京都市大学・知識工学部・教授

研究者番号：20271182