様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2013
課題番号：２３６５４０２３
研究課題名（和文）脱安定化部対象と乗数イデアル層

研究課題名（英文）Destabilizing objects and multiplier ideal sheaves

研究代表者
二木　昭人（Futaki, Akito）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０１４３２４７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,600,000円、（間接経費）　780,000円

研究成果の概要（和文）：乗数イデアル層はモンジュ・アンペール方程式が解けないとき現れる．一方，二木不変量はケーラー・アインシュタイン計量が存在するための障害であり，ケーラー・アインシュタイン計量の存在はモンジュ・アペール方程式に帰着されるので，乗数イデアル層と二木不変量とは何らかの繋がりがあると考えられる．このような方向での成果を佐野友二との共同研究で得た．同じ文脈にある研究として，佐野友二との共同研究で，リッチ流の自己相似解である縮小勾配リッチ・ソリトンにつき，コンパクトな場合の直径の下からの普遍的下限の評価を得た．更にこの評価の改良を，Hai-Zhong Li，Xiang-Dong Li との共同研究で得た．

研究成果の概要（英文）：The multiplier ideal sheaves appear when the Monge-Ampere equation can not be solved. On the other hand the Futaki invariant is an obstruction to the existence of Kahler-Einstein metrics, and the existence of Kahler-Einstein metrics is reduced to solving the Monge-Ampere equation. It is therefore expected to have some relationship between the multiplier ideal sheaves and the Futaki invariant. Yuji Sano and I obtained results in this direction. As a similar research in the same context, Yuji Sano and I obtained a universal lower bound of the diameter of compact shrinking Ricci solitons, which are the self-similar solutions to the Ricci flow. This lower bound was further improved in a joint work with Hai-Zhong Li and Xiang-Dong Li.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：アインシュタイン計量　ケーラー多様体　K-安定性　乗数イデアル層　リッチ・ソリトン

１． 研究開始当初の背景

extremal ケーラー計量の存在問題は 1950 年代に E.Calabi によって始められた．その特別な場合としてケーラー・アインシュタイン計量の存在問題，スカラー曲率一定ケーラー計量の存在問題がある．ケーラー・アインシュタイン計量の存在については 1970 年代に T.Aubin, S.T. Yau の研究により， 第１チャーン類が負と零の場合に解決された．第１チャーン類が正の場合は当該研究者による障害，いわゆる二木不変量が知られている他，A.Nadel による乗数イデアル層，G.Tian によるα不変量などを用いた十分条件が知られている．

２．研究の目的

コンパクトなケーラー多様体上の extremal 計量に関するカラビの問題は，幾何学的不変式論の意味の安定性が必要十分であろうという予想としてまとめられている．より具体的には，ドナルドソン・二木不変量を数値的判定法に用いて定義される K 安定性がスカラー曲率一定ケーラー計量の存在の必要十分条件と予想され， Donaldson-Tian- Yau 予想と呼ばれている．必要性については既に証明が得られているが，十分性の証明には困難が大きい．Fano 多様体の場合は正のケーラー・アインシュタイン計量の存在問題のことであり，この場合は深く研究されているが，それでも依然未解決である．本研究は，正のケーラー・アインシュタイン計量の存在問題の解決を目指し，脱安定化対象を幾何学的非線形偏微分方程式のブローアップ解析を通して把握することを目的とする．

３．研究の方法

本研究は複素代数幾何，複素解析，リーマン幾何，シンプレクティック幾何など多岐にわたる分野が関連するため，他分野の研究者との交流を必要とする．そのため，国内外の研究集会への参加，講演を通して研究交流を行った．また研究室の大学院生も国内の研究集会に多数参加した．また，国内外の研究者を招いて以下のような研究集会を開催した．

平成 23 年度は第 17 回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した．この研究集会は大阪大学・満渕俊樹，名古屋大学・小林亮一，東北大学板・東重稔と共催する集会である．23 年度は Changzheng Li，Siu-Cheong Lau 他，複素幾何の研究者を招いて，講演，討論を行った．また，第７回日中幾何学研究集会を東京工業大学，河口湖で開催した．この研究集会は日本と中国で隔年に開催する研究集会である．日本側の組織委員は当該研究者の他，東北大学・宮岡礼子，福岡大学・成慶明，大阪大学・満渕俊樹などである．Gang Tian，深谷賢治らが参加し，講演，討論を行った．

平成 24 年度は第 7 回 Pacific Rim Complex Geometry Conference を京都大学で開催した．この研究集会は日本，中国，韓国で毎年開催していて，24 年度は日本開催の順番であった．京都大学・吉川謙一，大阪大学・満渕俊樹などと共同で開催した．日中韓の他，欧米からも招待し，合計 17 人が講演し，討論を行った．また，第 18 回複素幾何シンポジウムを菅平高原で開催した．

平成 25 年度は第 9 回日中幾何学研究集会を北海道大学，登別で開催した．
Gang Tian, Kefeng Liu, Peter Topping 等が参加し，講演，討論を行った．また第 19 回複素幾何シンポジウムを菅平高原で開催した．

４．研究成果

乗数イデアル層はモンジュ・アンペール方程式が解けないとき現れる．一方，二木不変量はケーラー・アインシュタイン計量が存在するための障害であり，ケーラー・アインシュタイン計量の存在はモンジュ・アペール方程式に帰着されるので，乗数イデアル層と二木不変量とは何らかの繋がりがあると考えられる．このような結果を最初に出したのは Nadel で，１次元複素射影空間上で考察している．この結果は佐野友二氏との共同研究によりトーリック Fano 多様体に拡張されることが示された．更には log canonical threshould ないし α 不変量との関係を通してみる必要があることもわかる．乗数イデアル層はケーラー・アインシュタイン計量の場合だけでなく，リッチ・ソリトン方程式が解けないとき，リッチ流が収束しないときにも現れる．test configuration は G.Tian の言葉では special degeneration と呼ばれ，Tian は中心ファイバーは正規と仮定した．これは二木不変量を積分で定義し，特異計量の取り方によらないことを示すために，複素余次元２以上の特異点のみを持つ場合を考える必要があったからである．その後，Donaldson により，任意のスキームに対し二木不変量が定義し直され，任意の test configuration を用いて K-安定性が定義された．その後，Li-Xu により，test configuration の全空間は正規と仮定しなければならないこと，また，Tian が定義したときのように，中心ファイバーは正規と仮定して良いことが示された．

test configuration や二木不変量の relative version は Szekelyhidi らによって定義され，相対 K-安定性が定義されている．今年度はこの相対版にも取り組んだ．これについては満渕による結果があり，これに対する理解が深まった．これとは別な研究であるが，錐角度を持った特異ケーラー・アインシュタイン計量を用いて，Fano 多様体上にケーラー・アインシュタイン計量が存在す

ることと多様体が K 安定であることが最近 Chen-Donaldson-Sun, Tian により証明された．この方法は Cheeger-Colding による Gromov-Hausdorff 収束を用いる．収束は実は代数多様体としての極限であり，極限を中心ファイバーに持つテスト配位が構成される．この中心ファイバーの特異点集合が，この研究課題で追い求めて来たものであろう．またケーラー・リッチ流を用いた複素幾何への応用の研究が活発になっているので，これにも取り組んだ．その副産物として，コンパクトリッチ・ソリトンの直径を universal constant を用いて下からの評価することに成功した．これは通常のラプラシアンをひねって得られる２回楕円型線形作用素の固有値の評価から得られる．実際，ソリトンを定めるポテンシャルによりひねった Bakry-Emery ラプラシアンはそのポテンシャル自身を固有関数に持ち，固有値はソリトン方程式の計量の係数である．一方，通常のラプラシアンの固有値の評価については Li-Yau に始まる長い研究の蓄積があり，ここに直径が用いられる．これを Bakry-Emery ラプラシアンに拡張することができ，これをソリトンのポテンシャルに適用して，直径の評価を得る．この手法は平均曲率流の自己相似解にも適用でき，同様の結果を得ることができる．

まず，Bakry-Emery Lapalacian の第１固有値の評価を改良することにより，コンパクトリッチソリトンの直径の下からの評価を改良した．リッチソリトンはリッチ流の自己相似解として現れる．これはリッチ流がブローアップするときのリスケーリング極限として現れる．これをペレルマンのエントロピーを通して得る方法について研究した．その成果は熊本大学での集中講義で講義した．これと平行して平均曲率流の自己相似解についてもほぼ同じ方法が用いられることを調べ，錐多様体に応用した．この研究の原点にあるのは Fano 多様体の twisted Laplacian の第１non-zero 固有値と正則ベクトル場との１対１対応にあり，Bakry-Emery Lapalacian の場合もほぼ同じような結果がコンパクト多様体の場合は得られることから来ている．ところが，非コンパクト多様体の場合は，著しい差が生ずることがわかった．これは今後さらに追求してみる価値があると思われる．

ケーラー・アインシュタイン計量の存在問題については Chen-Donaldson-Sun および Tian による Yau-Tian-Donaldson 予想の証明が与えられた．その後 Szekelyhidi による partial C^0 評価による別証明が発表された．これの理解が進むとスカラー曲率一定ケーラー計量の場合の解決にも近づくことができると考えられる．板東・満渕の一意性定理が Berman 等によって与えられつつあるように，別な角度からの別証明が与えられ，理解が深まることが期待される．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① A.Futaki, K.Hattori and L.Ornea : An integral invariant from the view point of locally conformally K¥"ahler geometry, Manuscripta Math. 査読有り, 140(2013), 1―12
10.1007/s00229-011-0527-9

② A.Futaki, H.Z.Li and X.D.Li : On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons, Ann. Glob. Anal. Geom. 査読有り, 44(2013), 105--114,
10.1007/s10455-012-9358-5

③ A.Futaki and Y.Sano : Lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons, Asian J. Math., 査読有り, 17(2013), No.1, 17-31.

④ 二木昭人, Einstein 計量と GIT 安定性 II, 日本数学会誌「数学」, 査読有り, 64巻(2012), 113-130.

⑤ A. Futaki and Y. Sano : Multiplier ideal sheaves and geometric problems, ``Variational Problems in Differential Geometry (Eds. R. Bielawski, K. Houston and M. Speight)'', LMS Lecture Notes series, 査読有り, 394(October 2011), 68--93, Cambridge University Press.

⑥ A.Futaki and H.Ono : Einstein metrics and GIT stability, Sugaku Expositions, 査読有り, 24(2011), 93-122.

⑦ A.Futaki and Y. Sano : Multiplier ideal sheaves and integral invariants on toric Fano manifolds, Mathematische Annalen, 査読有り, 350(2011), 245-267.
10.1007/s00208-010-0556-9

〔学会発表〕（計 11 件）

① A.Futaki, K¥"ahler-Einstein metrics and K-stablity, Special Seminar,

University of Bucharest, June 15, 2013.
② A.Futaki : Lower diameter bound for compact shrinking solitons, Extremal K¥"ahler Metrics, Centre de recherches math¥'ematiques, Universit¥'e de Montr¥'eal, May 26 -- June 1, 2013.
③ A.Futaki, On the book ``Transformation groups in Differential Geometry''. Geometry and Analysis on Manifolds, -- A Memorial Symposium for Professor Shoshichi Kobayashi --, 東京大学数理科学研究科, 2013年5月22日-25日
④ 二木昭人, ケーラー・アインシュタイン計量とK安定性, 熊本大学談話会, 2013年4月24日
⑤ A.Futaki, Special Lagrangian submanifolds and Lagrangian self-shrinkers in toric Calabi-Yau cones, Conformal and K¥"ahler geometry, Institut Henri Poincare, Paris, France, December 12, 2012.
⑥ 二木昭人, 複素微分幾何に現れる積分不変量について, 東京大学談話会, 2012年11月16日
⑦ 二木昭人, コンパクト多様体上の縮小勾配リッチソリトンの直径について, 広島幾何学研究集会, 2012年10月5日(金)
⑧ 二木昭人, K¥"ahler-Einstein 計量と GIT 安定性, 日本数学会年会, 総合講演, 東京理科大学, 2012年3月29日.
⑨ A.Futaki : Special Lagrangian submanifolds and Lagrangian self-shrinkers in toric Calabi-Yau cones, Geometry Seminar, University of Hong Kong, March 13, 2012.
⑩ A.Futaki : Extremal K¥"ahler metrics and GIT stability, Mathematical Science Center, Fall Program 2011, Tsinghua University, China, September 6 -- September 29, 2011.
⑪ A.Futaki : Integral invariants in complex differential geometry, Mathematics Colloquium, University of Freiburg, Germany, July 7, 2011.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~afutaki/welcome-jtodai.html

６．研究組織
(1)研究代表者
二木昭人（Akito Futaki）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：90143247

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：