4版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　１２　月　１５　日現在

機関番号：１３９０１

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：２３６５４０２５

研究課題名（和文）リッチ形式の局所化と漸近的チャウ安定ファノ多様体における反標準因子の存在について

研究課題名（英文）Localization of Ricci form and the existence of an anti-canonical divisor on asymptotically Chow stable Fano manifolds

研究代表者

小林　亮一（Kobayashi, Ryoichi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：２０１６２０３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：定スカラー曲率ケーラー計量は複素モンジュアンペール方程式で表せないが，ケーラー計量の空間上のモンジュアンペール汎関数の臨界点になっている．このことから，定スカラー曲率ケーラー計量の研究が複素モンジュアンペール方程式と深い関係にあると予測される．一般の偏極におけるケーラー計量の空間上で定義された力学系で 修正ケーラーリッチ流（ケーラーリッチ流の右辺の -Ric(ω)+ω を -Ric(ω)+HRic(ω) に変更して得られる時間発展方程式，H は調和部分をとる操作）を離散化する力学系を発見した．これはある線形方程式と複素モンジュアンペール方程式を解く操作を繰り返して得られる力学系である．

研究成果の概要（英文）：cscK metric is not directly expressed as a solution of a Monge-Ampere equation. However, cscK metric is a critical point of the Monge-Ampere energy functional on the space of Kaehler metrics. It is expected that the study of csck metric is deeply connected to that of Monge-Ampere equations. I discovered a dynamical system on the space of Kahler metrics which discretizes the modified KRF (the evolution equation obtained by replacing -Ric(ω)+ω in the RHS of KRF by -Ric(ω)+HRic(ω), where H means the harmonic part). This dynamical system consists of iteration of the following procedure. First we solve a Poisson equation for u so that the trace of Ric(ω)+ddc u becomes constant. Next we solve the Monge-Ampere equation Ric(ω(φ))=Ric(ω)+ddc u for φ to get a Kaehler metric whose Ricci form coincides with Ric(ω)+ddc u. This procedure constitutes the basic step of out dynamical system. The iteration of this procedure is our dynaical system. This dynakical system fixes cdcK metric.

研究分野：数学（幾何学）

キーワード：複素モンジュアンペール方程式　ケーラー計量の空間　モンジュアンペールエネルギー汎関数　修正リッチ流の離散化　ケーラー計量の力学系　定スカラー曲率ケーラー計量

1. 研究開始当初の背景

DTY 予想と Osserman 問題は無関係であるが，ともに（多重）劣調和関数の族を考える問題であり，ともに力学系的視点が今後の発展の鍵になると私の直観が教えている．そこでこの 2 つの問題を同時進行で考えることになった．

2. 研究の目的

これらの問題における情報の引き出し方に新しい考え方と手法を導入する．DTY 予想では「K 安定性条件 Calabi-Yau 定理の特異摂動に現れる複素 Monge-Ampère 方程式の無限遠方における境界値条件と解釈する」というアイディアに到達した．Osserman 問題では閉リーマン面上で代数幾何を展開する伝統的方法では普遍被覆面での基本群作用の情報を拾いきれていないというアイディアに到達した．これらのアイディアが目的にかなうかどうかを検証する．

3. 研究の方法

(1) DTY 予想関連：偏極を一般化したことによって Ricci 曲率（Monge-Ampère 方程式）の解析に帰着できないという困難を，Szekelyhidi や満渕と異なる方向，すなわち K 安定性の概念を modify することではなく，考えている偏極射影多様体 X を無限遠因子に持つ 1 次元高い偏極射影多様体 Y を導入して $Y \setminus X$ 上のある種の Monge-Ampère 方程式の解の無限遠挙動にうつしかえて X の K 安定性を理解する，という方法を考えた．Calabi-Yau 問題の特異摂動化したとき，無限遠方で Kähler-Einstein 計量に漸近しない場合が K 安定性が壊れる場合であるという作業仮説を検証する目的で複数テーマで研究継続中である．

(2) Osserman 問題関連：代数的極小曲面 M の Gauss 写像を普遍被覆面 $\mathbb{D}$ に持ち上げ，$\mathbb{P}^1$ の因子 D と Gauss 写像 $g : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^1$ に，自由 Fuchs 群 $\pi_1(M)$-作用に関する不変性のもとでの Nevanlinna 理論を適用して，方程式 $g(z) \in D$ の解の個数を数える関数 $m_{g,D}(r) + N_{g,\mathrm{Ram}}(r)$ を評価するという方法を考えた（宮岡礼子氏と共同）．

4. 研究成果

(1) DTY 予想関連：筆者がこのアイディアを思いついたのは 10 年以上前である．その動機は板東重稔氏と筆者が示した「Fano 多様体 Y の非特異因子 X は $c_1(Y) = \alpha[X]$ $(\alpha > 1)$ を満たし，Kähler-Einstein 計量を持つとする．このとき $Y \setminus X$ は完備 Ricci 平坦 Kähler 計量を持つ」という結果にある．問 1: X が Kähler-Einstein 計量を持つという仮定をはずしたらこの結果はどうなるか？問 2： もし X が K 安定ならどうか？ここ数年の研究で問 1 は Monge-Ampère 方程式の非有界解の増大度評価の問題に帰着し，$Y \setminus X$ は完備 Ricci 平坦 Kähler 計量を持つことがわかる．問 2 を解決するのが本研究の課題である．なお，この着想は K-安定性を無限遠において Monge-Ampère 方程式の解の漸近挙動として理解しようということを意味する．数年続いている本研究の進み具合を述べる．目標 1： 偏極多様体 (Y, L) とその上の因子 X に対し，もし $c_1(L) = \alpha[X]$ $(\alpha > 1)$ ならば $Y \setminus X$ は scalar 平坦完備 Kähler 計量を許容することを証明する．目標 2：偏極が反標準因子のときに X が K 安定ならば $Y \setminus X$ の Ricci 平坦完備 Kähler 計量の "留数" は X 上の Kähler-Einstein 計量であることを証明する．目標 3： 目標 2 を達成したら目標 1 の解析をもとにして偏極を一般化する．偏極が反標準束のときは目標 1 は scalar 平坦を Ricci 平坦に強めた形で成り立つという途中結果を得た．解析的には Monge-Ampère 方程式の非有界解の増大度評価の方法を確立している．偏極が一般の場合は現在研究が進行中である．例えば Y として L の射影的完備化をとる．$c_1(L)$ に属する X 上の cscK 計量の $Y \setminus X$ 類似として，$Y \setminus X$ の scalar 平坦完備 Kähler 計量を考える．こうして (X, L) の K 安定性が $Y \setminus X$ の scalar 平坦完備 Kähler 計量の無限遠挙動の言葉にうつしかえる．この観点をとれば X 上の Ricci 曲率の解析を任意の偏極の場合に拡張するという困難な課題に代わって $Y \setminus X$ 上の Monge-Ampère 方程式の解析が現れ，問題が単純化される．実際，X の偏極が反標準束の場合には $Y \setminus X$ の Ricci 平坦完備 Kähler 計量を導く Monge-Ampère 方程式の解析は本研究の準備段階でほぼ完成しているし，そこでの解析を X の偏極が任意の場合にどのように拡張したらいいか，以下のような戦略がある：Y^{n+1} を複素射影代数多様体とする．L を Y 上の豊富直線束とし，非特異因子 X^n が存在して $L|_X = N_{X/Y}$, $c_1(L) = \alpha[X]$ $(\mathbb{Q} \ni \alpha > 1)$ を満たし，条件 $c_1(Y)c_1(L)^n > 0$ が成り立つと仮定する．L に正曲率の Hermite 計量を入れて $\theta := c_1(L, \|\cdot\|)$ とおき，σ を $\mathcal{O}_Y(X)$ の正則切断で $X = (\sigma)_0$ となるものとする．このとき $\omega(0) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\,\|\sigma\|^{-2\frac{\alpha-1}{2(n+1)}} = \|\sigma\|^{-2\frac{\alpha-1}{n+1}}\left(\theta + \frac{\alpha-1}{n+1}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\log\|\sigma\|^{-2} \wedge \bar{\partial}\log\|\sigma\|^{-2}\right)$ は $Y \setminus X$ 上の完備 Kähler 計量である．$\omega(\varepsilon) := (\|\sigma\|^2 + \varepsilon)^{-\frac{\alpha-1}{n+1}}\left(\theta + \frac{\alpha-1}{n+1}\frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^2+\varepsilon}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\log\|\sigma\|^{-2} \wedge \bar{\partial}\log\|\sigma\|^{-2}\right)$ は，Kähler 性を保ったまま $\omega(0)$ の極を丸めたものである．$\{\omega(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ は Y 上の Kähler 計量の族で $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon) = \omega(0)$, $[\omega(\varepsilon)] \in a_\varepsilon c_1(L)$ を満たすものである．特に $a_\varepsilon = O(\varepsilon^{-\frac{\alpha-1}{n+1}})$ である．以下，$\omega = \omega(\varepsilon)$ をパラメタ $\varepsilon > 0$ つきの Y の背景計量とする．Y 上の C^∞ 関数の族 $\{h_\varepsilon\}$ を，X から離れた場所 $\|\sigma\|^2 \geq \varepsilon$ では $h_\varepsilon = O(\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{n+1}})$ かつ $dh_\varepsilon = 0$ を満たし，積分条件 $\int_Y h_\varepsilon \omega(\varepsilon)^{n+1} = a_\varepsilon^n c_1(Y)c_1(L)^n$ を満たすようにとる．Y 上の体積形式 Ω'_ε で $\|\sigma\|^2 \geq \varepsilon$ 上で $\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon) = 0$ となるものが存在することを構成的に証明できる．$L = K_X^{-1} > 0$ ならこの主張は明らかであるが，これは仮定 $c_1(Y)c_1(L)^n > 0$ を満たす豊富直線束 L の場合も成り立つことを主張する．仮定は $\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon)$ が豊富因子 X と共通部分を持たない領域だけへの局所化を禁じ，この命題は X の近傍に局所化し得ることを主張している．したがって $h_\varepsilon = \mathrm{tr}_\omega(\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon)) + (\mathrm{const})$ によって上記の $\{h_\varepsilon\}$ を定数部分を正規化した形で構成できる．以上の準

備のもと，固定された $\varepsilon > 0$ に対し $\omega = \omega(\varepsilon)$ を背景計量とし，$\omega_u = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\,u$ をその変形として次の偏微分方程式系 $(*)$：$\triangle_{\omega_u} f_u + \mathrm{tr}_{\,\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega)) = h_\varepsilon$ (f_u を定義する方程式), $\int_Y e^{-f_u}\omega^{n+1} = \int_Y \omega^{n+1}$ (f_u の正規化条件), $\Omega(\omega_u) := e^{-f_u}\omega^{n+1}$ (体積形式 $\Omega(\omega_u)$ の定義), $\mathrm{Ric}(\omega_u) = \mathrm{Ric}(\Omega(\omega_u))$ (ω_u に対する prescribed Ricci form equation) を考える．第3方程式は Monge-Ampère 方程式 $\frac{\det(g_{i\bar j}+u_{i\bar j})}{\det(g_{i\bar j})} = e^{-f_u}$ と同値である．固定された $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき一様な ε 依存性を持つことが示されれば，極限 $\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty}\omega_t$ が $Y\setminus X$ 上の完備 scalar-flat Kähler 計量になる．この解析的問題は，Y が Fano 多様体，X が非特異因子で $c_1(Y) = \alpha[X]$ ($\mathbb{Q}\ni\alpha > 1$) のときは解けて，$Y\setminus X$ は完備 Ricci-flat Kähler 計量を許容することが導かれる．このとき Y は Fano 多様体である．もし X が Kähler-Einstein 計量を許容すれば，それを使って良い境界条件を設定できて $\omega(0) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\,u$ が完備 Ricci-flat Kähler 計量で u はある種の減衰評価を持つことが示される．一方，X が Kähler-Einstein 計量を許容しないと，どんな境界条件をとっても上記の連立方程式の解の最大値は $\varepsilon\to 0$ のとき発散することが示される．したがって ε 依存性が一様な先験的評価は例えば $\|\frac{u_\varepsilon}{1+\mathrm{dist}^2_{\omega(\varepsilon)}(\cdot,o)}\|_\infty \le C$ (o は $Y\setminus X$ の固定点) のような "増大度評価" でなければならない．この研究の途中段階でこのような増大度評価が $L = K_X^{-1}$ のときには可能であることを示した．その議論は "C^2 評価を仮定 $\Rightarrow$ 仮定された C^2 評価の言葉で増大度評価を示す $\Rightarrow$ 前段階の増大度評価の言葉で表される先験的 C^2 評価 $\Rightarrow$ 先験的 C^2 評価を示す $\Rightarrow$ 先験的増大度評価を得る" という，増大度評価と C^2 評価の間に成り立つ先験的関係式をまず求めて，連立方程式を解くようにして先験的増大度および C^2 評価を得る，というものである．$\mathrm{Ric}(\omega)$ と $\mathrm{Ric}(\Omega'_\varepsilon)$ が $Y\setminus\Omega'_\varepsilon$ において同様の集中現象を満たすことから，$f_u = f_{u,1} + f_{u,2}$, もし十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し Kähler 計量族 $\{\omega_u\}$ と $\{\omega(\varepsilon)\}$ が一様に同値なら $\{f_{u,1}\}$ は一様に有界，十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{Supp}(\triangle_{\omega_u} f_{u,2}) \subset Y\setminus\Omega_\varepsilon$，という条件を満たす分解が存在する．ただし $\Omega_\varepsilon := \{\|\sigma\|^2 < \varepsilon\}$ である．この分解は，偏微分方程式系または同値な発展方程式系の先験的評価の出発点になる観察である．X の偏極が反標準束でないときの scsK 計量はそのままでは X 上の Monge-Ampère 方程式に帰着できないが，Y 上に議論を持ち上げれば，偏極を反標準束から豊富直線束に一般化しても途中結果の議論は拡張できる可能性が大きい．しかも，Monge-Ampère 方程式の解析そのものはほとんどの場面で K_X^{-1} でも一般の豊富直線束 L でも共通と思われるので，その戦略を予想の連鎖の形で述べる：

戦略 1： 正規化条件 $\int_Y e^{-f_u}\omega^{n+1} = \int_Y \omega^{n+1}$ と初期条件 $\omega_u(0,\cdot) = \omega$ のもとで，Y^{n+1} 上の Monge-Ampère 型発展方程式と Poisson 方程式から成る偏微分方程式系 $\frac{\partial u}{\partial t} = \log\frac{\det(g_{i\bar j}+u_{i\bar j})}{\det(g_{i\bar j})} + f_u$, $\triangle_{\omega_u} f_u + \mathrm{tr}_{\,\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega)) = h_\varepsilon$ を導入する．ただし $\omega = \omega(\varepsilon) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar j} dz^i\wedge d\bar z^j$ は背景計量である．

戦略 2： 次の命題を証明する："関数 $h_\varepsilon - \mathrm{tr}_{\,\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega))$ の L^n 評価のみによる量による $\|f_u\|_\infty$ の $\forall\varepsilon > 0$ (small) と $\forall t > 0$ に関して一様な評価が存在する"．

戦略 3： 次の命題を証明する："関数 $h_\varepsilon - \mathrm{tr}_{\,\omega_u}(\mathrm{Ric}(\omega))$ の L^n 評価のみによる量による $\|\dot f_u\|_\infty$ の $\forall\varepsilon > 0$ (small) と $\forall t > 0$ に関して一様な評価が存在する．ただし $\dot f_u$ は $\frac{\partial f_u}{\partial t}$ のことである"．

戦略 4： 次の命題を証明する："上記の連立発展方程式に対し $\forall t\in[0,+\infty)$ において解 (u,f), $u = u_t(\cdot)$, $f = f_t(\cdot)$ が存在する"．「$Y\setminus X$ に完備 Ricci-flat Kähler 計量が存在する」という途中結果は，$Y\setminus X$ における完備 Ricci-flat Kähler 計量の存在問題という特別な場合では，X における Kähler-Einstein 計量の問題には存在した障害（二木不変量や K 安定性などの障害）は $\varepsilon > 0$ でパラメタ付けされた Kähler 計量族 $\{\lim_{t\to\infty}\omega_u\}$ が $Y\setminus X$ の完備 Ricci-flat Kähler 計量に収束するときの "無限遠での挙動に姿を変えて存在している" と解釈できることを意味する．上記の戦略に先立って行った議論は，同様のことが，L_X が X 上の一般の豊富直線束で (Y,L) が (X,L_X) を拡張する1次元高い偏極多様体で $c_1(L) = \alpha[X]$ ($\alpha > 1$) かつ $c_1(Y)c_1(X)^n > 0$ が成り立つ場合にも言えることを示唆している．上記の戦略 1,2,3,4 はこれを確認する方向での計画である．Donaldson-Tian-Yau 予想は，X が cscK 計量を許容することと X の K 安定性が同値であることを主張する．したがって，以上述べてきたアイディアは次に様にまとめられる：本研究は，X^n の "非 K 安定性" を，小さな $\varepsilon > 0$ でパラメタづけされた Y^{n+1} 上の Monge-Ampère 方程式の解の族の X における発散の様子から読み取ろうという試みである．

戦略 5. 定 scalar 曲率 Kähler 計量の方程式は Monge-Ampere 方程式ではないが, Monge-Ampere energy functional の臨界点であることことから Monge-Ampere 方程式への帰着が何らかの意味で可能なのではないかと思われる．一般の偏極における Kähler 計量の空間 $\mathcal{H}$ の力学系で modified Kähler-Ricci flow を離散化するものを次のように導入する：$\mathrm{Ric}(\omega) + dd^c u\}\wedge\omega^{n-1}$ が ω^n の scalar 倍となる $u\in C^\infty_{\mathbb{R}}(X)$ をとり，未知関数 ϕ に対する Monge-Ampere 方程式 $\mathrm{Ric}(\omega_\phi) = \mathrm{Ric}(\omega) + dd^c u$ を解く．すると $\mathcal{H}$ の力学系 $\omega\mapsto R^L\omega := \omega_\phi$ が定まる．この力学系にそって K-energy がどのように振る舞うかを調べる．また，iteration $(R^L)^j\omega$ において $j\to\infty$ とすると（問題の偏極が定 scalar 曲率 Kähler 計量を許容するとき）定 scalar 曲率 Kähler 計量に収束するかどうかを考える．この問題は Berman の thermodynamical formalism を拡張する試みである．

(2) Osserman 問題関連：研究の要点は2点ある：(i) 自由 Fuchs 群 $\pi_1(M)$ の作用に関する不変性のもとで $\mathbb{D}$ 上の Nevanlinna 理論 (Nevanlinna-Galois theory) を構築する．(ii) 周期条件を Nevanlinna-Galois 理論に翻訳する．

宮岡氏と筆者は代数的極小曲面に対する不変量 $R = \int_M g^*\omega_{\rm FS}/\int_M \omega_{\rm hyp}$ を導入した．これは上記 Osserman の結果を $R > 1$, $D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R}$ (ν_g は全分岐値数で D_g は除外値数) という形で再現するだけでなく，その Nevanlinna 理論類似 $\kappa_g = \inf\{\kappa > 0 \mid \int_0^1 \exp(\kappa T_g(r))dr = \infty\}$ を導入できるという長所がある ($T_g(r) = \int_0^r \frac{dt}{t}\int_{\mathbb{D}(t)} g^*\omega_{\rm FS}$ は g の特性関数). $\int_{\mathbb{D}(t)} g^*\omega_{\rm FS}$ を $\int_{\mathbb{D}(t)} \omega_{\rm hyp}$ に変えて $\kappa_{\rm hyp}$ を定義すると $\kappa_{\rm hyp} = 2$ である．R を下から押さえる評価は $\kappa_g/\kappa_{\rm hyp}$ を上から押さえる評価に対応する．現時点での成果を整理する：

(2.1) 幾何的 LLD と周期条件 : Nevanlinna 理論の真髄である第 2 主要定理を導くのが対数微分の補題 (LLD) である．代数的極小曲面の Gauss 写像 g が従うべき LLD は次である：円板上の有理型関数 f が $T_f(r) = O(\log \frac{1}{1-r}) \Leftrightarrow 0 < \kappa_f < \infty$ を満たせば $m_{f,D}(r) - m_{f^{(1)},D^{(1)}}(r) \leq \log \frac{1}{1-r} + o(\log \frac{1}{1-r})//$. 記号 $//$ は $\rho(r) = \int_0^r \exp(\kappa_f T_f(r))dr$ が $\mathbb{R}$ のある測度有限な Borel 集合の外に値をとるとき不等式が成り立つことを意味する．κ_f の定義から $r \to 1$ のとき漸近的に $\rho(r) = \log \frac{1}{1-r} = \kappa_f T_f(r)$ である．$\deg(D) \to \infty$ のとき LLD がどうなるかが問題である．答：たとえ $k = \deg(D) \to \infty$ でも，$\mathbb{P}^1$ のある開集合 W が存在して $\mathrm{Supp}(D) \cap W = \emptyset$ となる D だけを考えれば LLD は $m_{f,D}(r) - m_{f^{(1)},D^{(1)}}(r) \leq \log \frac{1}{1-r} + o(\log \frac{1}{1-r}) + O(\log k)//$ $(*)$ の形になる．これを幾何的 LLD とよぶ．幾何的 LLD を使って周期条件を Nevanlinna 理論で表現するため $V = \mathbb{R}(1-g^2) + \mathbb{R}i(1+g^2) + \mathbb{R}(2g)$ という 3 次元実ベクトル空間を考えて $|a(1-g^2) + bi(1+g^2) + c(2g)|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ で内積を入れて単位球面 V_1 を考える．$p(g) \in V_1$ に対し，積分 $H(z) = \int_{z_0}^z g(g)\omega$ は普遍被覆面 $\mathbb{D}$ 上の 1 価関数である．周期条件は $\forall\gamma \in \pi_1(M)$ に対し $H(\gamma z) - H(z) \in i\mathbb{R}$ すなわち $|e^H|$ の $\pi_1(M)$ 作用の下での不変性と同値である．$p(g)$ をランダムにとっても極をとる点は不変であることに注目して，$\mathbb{P}^1$ の因子 D を g が極をとる点における e^H の値によって定め，関数 e^H に幾何的 LLD を適用してみる．ここで問題は $\mathbb{D}(r)$ における g の極で e^H の値をとって $\mathbb{P}^1$ にプロットしていくと $r \to 1$ のとき $k = \deg(D) \to \infty$ となることである．しかし周期条件から D は有限個の $|z| = \alpha_i$ で表される円周上に分布することが分かる．したがって $\{\infty\}$ のある近傍と $\mathrm{Supp}(D)$ は交わらない．こうして $(*)$ が使える状況となり，周期条件から，[命題 1] $T_{e^H}(r) = O(\log \frac{1}{1-r})$ すなわち $0 < \kappa_{e^H} < \infty$.

(2.2) Collective Cohn-Vossen 不等式. 不変量 $R = \int_M g^*\omega_{\rm FS}/\int_M \omega_{\rm hyp}$ の Nevanlinna 類似として κ_g を導入した．すべての代数的極小曲面に対して成り立つ κ_g の上からの評価が collective Cohn-Vossen 不等式である．基本領域 F とその cluster 部分 C に対し $\mathrm{diam}_{\rm eucl}(F)/\mathrm{diam}_{\rm eucl}(C)$ を捩れの強さとよぶ．$\mathbb{D}(a,b)$ で円環領域 $a < |z| < b$ を表す．円環領域 $\mathbb{D}(1-(1-t)^{\frac{3}{4}}, t) \subset \mathbb{D}$ において Euclid diameter が $1-t$ と $(1-t)^{\frac{3}{4}}$ の間にあって捩れの強さが $(1-t)^{-\frac{1}{4}}$ から $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$ の間にある基本領域によって覆われる部分を放物列領域とよぶことにする．円環領域 $\mathbb{D}(1-(1-t)^{\frac{3}{4}}, t)$ において放物列領域の割合は $t \to 1$ のとき正の数で下から押さえられ，一般に 1 に収束しないことが観察できる．すべての代数的極小曲面に対し，$t \to 1$ のとき放物列領域において面積比の評価 $\mathrm{A}_{\rm FS}/\mathrm{A}_{\rm hyp} \geq \frac{2}{e}$ である．一方，弱い評価 $R \geq 1$ から，円環領域のうち放物列領域の外側に対し $\mathrm{A}_{\rm FS}/\mathrm{A}_{\rm hyp} \geq c$ $(2/e \leq c \leq 1)$ である．よって，すべての代数的極小曲面に対し円環領域において $t \to 1$ のとき漸近的に collective Cohn-Vossen 不等式 $\mathrm{A}_{\rm FS}/\mathrm{A}_{\rm hyp} \geq \frac{2}{e}$ が従う．Collective Cohn-Vossen 不等式の原理を述べる．問題の面積比において $t \to 1$ のとき主要項は軌道数 ≥ 4 の放物的固定点に対応する放物列領域から来る．対応するカスプの近傍で $g^*\omega_{\rm FS}$ と $\omega_{\rm hyp}$ の面積を比較したいが，問題がある．$\omega_{\rm hyp}$ は M 全体で定義された双曲計量のカスプ近傍への制限であり，$\frac{4|d\zeta|^2}{|\zeta|^2(\log(a/|\zeta|^2))^2}$ という局所表示には任意定数 $a > 0$ が含まれる．すべての代数的極小曲面に通用するような a は何だろうか？これを解決するのが計量化 Riemann-Hurwitz である．半径がわずかに $\sqrt{2}$ より小さい（以後 $\sqrt{2}$ とする）2 枚の平坦円板の境界で滑らかな橋を架けてできる全面積 4π の S^2 の計量を枕カバー計量とよんで Fubini-Study 計量を代用させる（計算を楽にするために導入したが，Poincaré 計量の任意定数の決定などで本質的な役割を持つことが分かって驚いた）．Gauss 写像 $g: M \to \mathbb{P}^1$ の ramification locus を $\{R_1, \ldots, R_m\}$ とし，カスプと合わせた集合を $\{Q_1, \ldots, Q_{t+n}\}$ とする．$\{g(Q_i)\}_{i=1}^{t+n}$ を重複がないように番号をつけたものを $\{R_j\}_{j=1}^m$ とする．奇数番号の R_j は上の円板の中心近く，偶数番号の R_j は下の円板の中心近くに位置するように $\mathbb{P}^1$ に枕カバー計量を入れることができる．$\{R_j\}$ を平坦円板上では直線になるように結んでできる線分によって切り開いて（両端の点は同一視）円板を作り，それを M に展開する．両端の点 R_1 と R_m で Gauss 写像が非自明に分岐していれば M の円板（閉包は円板ではないかも）による分解を得る．各円板上 Gauss 写像は単射である．これが実現するように必要なら $\overline{M}$ を $\{P_1, \ldots, P_n\}$ で分岐する n 重巡回被覆をとる．こうして得られる M の分割の頂点を中心に距離 $\sqrt{2}$ の点の軌跡を考えると円板による双対分解を得る．その境界の Gauss 像は枕カバー計量の曲率が集中している橋に含まれる．こうして各カスプ P_i に対し座標 ζ の入った円板 $\{|\zeta|^2 < 2\}$ が局所座標近傍としてとれる．この座標近傍が良い理由は Fubini-Study 計量の同じ cohomology 類に属する枕カバー計量に由来する平坦計量 $dx^2 + dy^2$ と双曲計量 $\frac{4|d\zeta|^2}{|\zeta|^2(\log(2/|\zeta|^2))^2}$ を比較できるからである．すべての代数的極小曲面に対し $\mathrm{A}_{\rm FS}/\mathrm{A}_{\rm hyp}$ を下から押さえるのであれば，できるだけ双曲計量を大きくとることが必要であり，それは任意定数を $a = 2$ とおくことによって実現される．ここで注意しなければならない点は基本領域の頂点の近傍は何かを計算するときには常に穴あき単位円板 $\mathbb{D}^*$ の開集合 $0 < |z| < c$ と同一視されることである．一方，1 つの放物的固定点 $P \in \partial\mathbb{D}$ に対応する放物列に属する 1 つの基本領域の頂点 P の近傍だけ

を取り出して M に戻すと，カスプ P_i の近傍の 1/軌道数 の角領域にしかならない．この不一致は軌道数に由来する．この不一致に対し双曲計量は不変性を持つがFubini-Study 計量の方は軌道数倍しなければならない．すべての代数的極小曲面の基本領域に現れる軌道数の最小値は 4 である（内部の分岐点も勘定に入れる）．したがって放物列の 1 つの基本領域での面積比較はカスプ近傍での比較 $\frac{4\pi r^2}{4\pi(\log(2/r^2))^{-1}} = r^2\log(2/r^2)$ となる．これは $r^2 = 2/e$ のとき最大で最大値は $2/e$ である．$r^2 = 2/e$ でこの関数は停留的だからその近傍ではほとんど変化しない．よって鞍点法の議論により $\mathbb{D}(1-(1-t)^{\frac{3}{4}}, t)$ の放物列領域における面積比 $\mathrm{A_{FS}}/\mathrm{A_{hyp}}$ は $t \to 1$ のとき漸近的に $2/e$ によって下から押さえられる．これが示されればすべての代数的極小曲面に対し $\kappa_g < e$ が成り立つことになる．この議論から分かるように内部の分岐点の効果を入れた軌道数が大きくなれば比 $\mathrm{A_{FS}}/\mathrm{A_{hyp}}$ は大きくなり，κ_g は小さくなる．Costa，宮岡-佐藤，Chen-Gackstatter，Karcher-Hoffman 曲面など，代数的極小曲面の具体例でこのことを確認することができる．不変量 κ_g の上限の評価の原理を局所パラメータ ζ と線形座標 z の特異座標変換に適用すると（周期条件を使わないで）次が分かる：[命題 2] $r \to 1$ のとき漸近的に $J \geq J' + \log\frac{1}{1-r}$, $m_{H',S_\infty}(r) = m_{h,S_\infty}(r) = 2T_g(r)$．注意：後者に ζ が表立って現れないがWeierstrass data が basic domain 上定義され完備極小曲面を定義することが証明では本質的である．後者は命題 3 の証明で本質的である．

(2.3) $\pi_1(M)$-作用の下での Nevanlinna 理論 (Nevanlinna-Galois theory). 幾何的 LLD を e^H に適用することによって “周期条件から Nevanlinna 理論的情報を引き出す” には $\pi_1(M)$ 作用の下での Nevanlinna 理論が必要である．代数的極小曲面の Weierstrass data が定義される穴あき Riemann 面 M を basic domain とよぶことにする．M は普遍被覆面 $\mathbb{D}$ の $\pi_1(M)$ 作用の下での基本領域とも同一視できるが，こちらは基本領域と呼んで basic domain と区別する．$\overline{M}$ の種数を G, $\sharp(\overline{M}\setminus M) = n$ のとき，基本領域は $\mathbb{D}$ の理想測地 $4G+2(n-1)$ 角形で実現でき，各頂点は放物的固定点である．各頂点に対し頂点を固定する放物的部分群が対応し，問題の頂点を共有するすべての基本領域の集合に働かせたときの軌道の個数をその頂点の軌道数とよぶと，このとき $4G$ 個の頂点に対し軌道数は $4G$ である．ただし $\mathrm{A_{FS}}/\mathrm{A_{hyp}}$ の計算では内部の分岐点の存在によって軌道数はもっと大きくなると考えねばならない．1 つの放物的固定点 P を頂点に持つ基本領域に P を固定する放物的部分群の生成元を繰り返し適用して P に近づけてみる．すると Euclid 的直径は $O(1/n)$ で減衰し，P 以外の頂点は直径 $O(1/n^2)$ の cluster C を形成する．この現象を放物的部分群による局所化とよぶ．共形不変な変分問題で双曲的部分群による局所化は重要であるが，放物的部分群による局所化を幾何に応用するのは本研究が最初だと思う．Nevanlinna 理論では $\partial\mathbb{D}(r)$ 上の積分たとえば $m_{f,D}(r) = \int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|f(re^{i\theta}),D|}\frac{d\theta}{2\pi}$ ($|\cdot,\cdot|$ は弦距離）が重要であるが，$\mathbb{D}$ が M の普遍被覆面のときには $\partial\mathbb{D}(r)$ は M の曲線である．$r \to 1$ のとき，$\partial\mathbb{D}(r)$ の M での像は cluster の形成により，カスプのまわりに 2 重の局所化を起こす（P に $O((1-r)^{-\frac{1}{4}})$ 回巻き付きながら P に無限に近づく I 型局所化，P での適当な局所パラメータ ζ をとれば $|\zeta|^2 = 2e^{-1}$ あたりに $O((1-r)^{-\frac{1}{4}})$ 回巻き付くように見える II 型局所化）．Weierstrass data は M で定義されているから，カスプ $P \in \overline{M}\setminus M$ における局所座標 ζ を使って微分を表現することによって群作用を取り入れた LLD が存在して 2 重局所化の効果によって ζ を導入した効果を検出するはずである．このように基本群作用の下では 2 種類の LLD を考えて群作用の情報を引き出そうという着想が生まれる．計算をしてみると次を得る：通常の接近関数 $m_{g^{(1)},S_0}(r)$ ではジェットをとるのに線形座標 z を使うが $\partial\mathbb{D}(r)$ を M の曲線と考えてカスプの近くを通るときには z 微分でなく ζ 微分をとることができる．こうして定義される接近関数を $m^{\zeta}_{g^{(1)},S_0}(r)$ と表す．この約束のもとで $J := (m_{g^{(1)},S_\infty}(r) - m^{\zeta}_{g^{(1)},S_\infty}(r)) + (m_{h,S_0}(r) - m^{\zeta}_{h,S_0}(r))$, $J' := m_{h,S_0}(r) - m^{\zeta}_{h,S_0}(r)$, $J'' := m_{h,S_\infty}(r) - m^{\zeta}_{h,S_\infty}(r)$ を導入する．ここで $dg = g^{(1)}dz$ または $dg = g^{(1)}d\zeta$, $\omega = hdz$ または $\omega = hd\zeta$, $h = (g, h)$ と解釈する（$S_{0/\infty}$ は $\overline{T\mathbb{P}^1}$ の零/無限大切断を表す）．$\log k = \log\deg D$ は $k \to \infty$ となっても他の無限大より small order になることが collective Cohn-Vossen 不等式の議論の副産物として分かる：[命題 3] 2 種類の幾何的 LLD を e^H に適用して得られる評価式は次の 2 つである：$J'' \leq (1-\kappa_g^{-1})\log\frac{1}{1-r}//$, $\quad (8\kappa_g^{-1}-2)\log\frac{1}{1-r} \leq J' + 2J''//$.

(2.4) 結論．命題 3 と命題 2 の第 1 の不等式と $T_g(r) = \frac{1}{\kappa_g}\log\frac{1}{1-r}$ (as $r \to 1$) を合わせると周期条件を Nevanlinna 理論で表現した不等式 (∗∗) $2T_g(r) - J \leq (3\kappa_g - 8)T_g(r)$ が導かれる．一方，LLD から第 2 主要定理に至る幾何的定式化で $g^{(1)} = \frac{g^{(1)}}{h} \times h$ と分解して特異座標変換 $\zeta \leftrightarrow z$ の効果を取り込んで Nevanlinna calculus を実行すると $\mathbb{P}^1$ の任意の正因子 D に対し $m_{g,D} + N_{g,\mathrm{Ram}}(r) \leq \kappa_g T_g(r) + (2T_g(r) - J)//$ が示される．これと (∗∗) を合わせると $m_{g,D}(r) + N_{g,\mathrm{Ram}}(r) \leq 4(\kappa_g - 2)T_g(r)//$ を得る．これと collective Cohn-Vossen 不等式 $\kappa_g < e$ から $\sharp(\mathbb{P}^1 \setminus g(M)) \leq 2$ が従い，代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数は高々2 であるという Osserman の予想が肯定的に解かれる．現在，宮岡氏と最終検討を行っているところである．

継続中の上記研究の成果として暫定的に書かれた主なプレプリント：

(1) R. Kobayashi (and R. Miyaoka), ”Nevanlinna-Galois Theory for algebraic and pseudo-algebraic minimal surfaces – value distribution of the Gauss map –”, preprint 2015, 113 pages.

(2) R. Kobayashi, “Asymptotically conical Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds”, preprint, 2014, 61pages.

(3) R. Kobayashi, “Asymptotically conical Ricci-flat Kähler

metrics and compactification of complex homology cells", preprint, 2013. 20pages.
(4) R. Kobayashi, "On the fundamental group of an algebraic variety with ample canonical bundle which admits a special canonical divisor", preprint, 2012. 11pages.

5．主な発表論文等
主な招待講演 (8 件)
(1) 小林亮一, "満渕汎関数", Mabuchi65 満渕俊樹教授退職記念シンポジウム 2015/03/12-03/13, 大阪大学.
(2) R. Kobayashi, "Localization arising from iteration of parabolic translation and collective Cohn-Vossen inequality", 5-th International Congference on Differential Geometry and Analysis, 2014/05/31-06/04,Karatsu.
(3) R. Kobayashi, "Metrization of Osserman's theory on the Gauss map of algebraic minimal surfaces", Distribution of Rational Points and Rational Curves in Algebraic Varieties, 2015/03/15-03/20, BIRS, Banff, Canada
(4) R. Kobayashi, "Localization arising from iteration of parabolic translation and collective Cohn-Vossen inequality", 5-th International Conference on Differential Geometry and Analysis, 2014/05/31-06/04
(5) R. Kobayashi, "Relations among various invariants on algebraic minimal surfaces", The 19-th Symposium on Complex Geometry, 2013/10/30-11/02
(6) R. Kobayashi, "Hamiltonian Volume Minimizing Property of Maximal Torus Orbits in the Cpmplex Projective Space", Conference on the occasion of Martin Schlichenmaier's 60th Birthday, University of Luxembourg, 2012/12/10-12/12
(7) R. Kobayashi, "Hamiltonian Kähler-Ricci Flow, Self-Similar Solution and Futaki Invariant", Mini-course and Workshop - Topology of Algebraic Varieties, Centre de Recherces Mathematiques, Universte de Montreal, 2012/09/21-09/28
(8) R. Kobayashi,"Nevanlinna Theory from the View Point of Lemma on Logarithmic Derivative", Mini-courses and Workshop - The Topology of Algebraic Varieties, Centre de Recherces Mathematiques, Universte de Montreal 2012/09/21-09/28

6．研究組織
研究代表者
小林亮一 (Kobayashi Ryoichi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号 20162034