様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2014
課題番号：２３６５４０２６

研究課題名（和文）離れた曲線を繋ぐ極小曲面の非存在

研究課題名（英文）non-existence of minimal surfaces connecting distant curves

研究代表者
小磯　憲史（Koiso, Norihito）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０１１６０２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：3 次元 Poincare 球に共形な Riemann 多様体 (M,g) = (H^3, e^{2f}g_0) (|df| < a < 1/2, f < b) において，平均曲率の絶対値が e^{−b}(1−2a) 以下の曲面についての分離定理が成立する．即ち，M における任意有限個の点の配置 {P_i} に対して，次の性質を持つ正の定数 r が存在する： 各点 P_i を中心として半径 r 以下の測地球 B_i があり，それぞれの中に閉曲線 G_i があれば，その和集合を境界とする平均曲率の絶対値が e^{−b}(1−2a) 以下の曲面は測地球の和集合に含まれる．

研究成果の概要（英文）：Let (M,g) be a Riemannian manifold (H^3, e^{2f}g_0) (|df| < a < 1/2, f < b), conformal to the 3-dimensional Poincare sphere. Then (M, g) has separation property for surfaces such that absolute value of mean curvature < e^{−b}(1−2a). Namely, for any placement of finite point set {P_i} on M, there exists a positive number r with following property: For each i, let B_i be a geodesic sphere of radius < r with center P_i and G_i be closed curve in B_i, S be a compact surface such that its boundary is the union ∪_iG_i and its absolute value of mean curvature is less than e^{−b}(1−2a), then S is contained in the union ∪_iB_i.

研究分野：微分幾何学

キーワード：極小部分多様体　平均曲率一定曲面

１．研究開始当初の背景

与えられた境界を持つ極小曲面の存在は最終的に 1930 年に T.Rado によって解決された.

しかしながら，境界が連結でない場合には必ずしもそれを境界とする連結極小曲面が存在するわけではない.

もっとも簡単な例は, Euclid 空間において同じ回転軸を持つ半径 $r > 0$ の 2 つの円である.

その場合は，2 つの円の距離を D とすると D/r がある値 A よりも小さければ 2 つ, 等しければ 1 つの解を持ち，大きければ解はない.

この結果は，Minimal surfaces I (1992 年) の錐定理を用いて証明される.

さらに，この結果は最近申請者によって任意次元の負または 0 定曲率空間に拡張された. また，個数も任意個数に拡張された.

２．研究の目的

非正定曲率空間 X^{n+1} においては有限個の境界 Γ_i^{n-1} は，それらの直径が相互の距離に比べて十分小さいならば，1 つの極小曲面で繋ぐことはできない.

本研究はその事実を球面，さらに一般の Riemann 多様体に拡張するものである.

より具体的には,

1) 極小超曲面を平均曲率一定超曲面に拡張する.

2) 空間を一般の Riemann 多様体に拡張する.

３．研究の方法

(1-1) Euclid 空間の平均曲率一定曲面.

結果を一定平均曲率 H をもつ超曲面 M^n に拡張する.

この研究はまず Euclid 空間においておこなう.

結果としては, 絶対値 $|H|$ が境界 Γ_i^{n-1} の最大直径 d と境界間の距離 D に関するある関数 $F(D,d)$ の値よりも小さいという不等式の条件の下で成立することが期待される.

この証明の方針は，実際に同じ平均曲率 H を持つ回転面の族を構成し，最大値原理を適用するということになる.

まず分かりやすい 3 次元 Euclid 空間で研究を進め，ついで一般次元に拡張する.

少なくとも，次の予想を証明することを目標とする.

予想： z 軸を回転軸とし xy 平面に関して対称で半径が $z=0$ で最小となる平均曲率一定 H の曲面族のうち，円筒から連続変形して球面の和になるまでを考える.

この曲面族が通過しない集合の連結成分のうち，原点を境界点として z 軸の正（負）の部分と共通点を持つ領域を $\Delta_\pm$ とする.

このとき, $\Delta_\pm$ に含まれる閉曲線 $\Gamma_\pm$ はで円筒に含まれる有界かつ連結な平均曲率一定 H 曲面で繋ぐことはできない.

(1-2) Euclid 空間の平均曲率一定曲面の最良評価.

Euclid 空間における極小超曲面で点の個数が 2 の場合，上の関数 $F(D,d)$ は最良のものを求めることができる.

それは評価の基本となる極小超曲面族が単純な相似変形で得られるからである.

しかし，平均曲率一定曲面の場合は，個々の曲面についてはよくわかっているが，証明に必要な超曲面族のあらわな記述が得られていないため，最良の結果を得ることは自明ではない.

そこで，極小超曲面族全体の境界を制御する常微分方程式を導き，その解を解析して具体的に記述することで最良の評価を得る.

(2-1) 球面 S^{n+1} の極小超曲面.

一般の Riemann 多様体への拡張の準備よして，球面 S^{n+1} で研究する.

しかし，球面全体では同じ結果が成り立たないことは明らかなので，半球面 S^{n+1}_+ において類似のことを証明する.

すなわち，半球面 S^{n+1}_+ に置かれれて互いの距離に比べて直径が十分小さい 2 つの閉部分多様体 Γ_i^{n-1} は S^{n+1}_+ に含まれるコンパクト連結極小超曲面 M^n で繋ぐことはできないことを証明する.

この，Γ_i^{n-1} が 2 個の場合は H^{n+1} での方法を変更することで比較的容易に証明ができると考えられる.

しかし，任意個数の Γ_i^{n-1} に拡張することをその後の目標とするので，Γ_i^{n-1} が S^{n+1}_+ の境界に近い場合の評価を重視して研究をすすめる.

(2-2) 非正曲率多様体の極小超曲面.

一般の非正曲率多様体 X^{n+1} では Euclid 空間と同じ結果が成り立つことが直感的に期待されるが, Euclid 空間における証明は全く通用しない.

それは，具体的に極小超曲面を構成することができないからである.

そこで，問題を逆に設定する.

E^{n+1} に先に超曲面族を与えておき，その平均曲率の符号が最大値原理にとって都合が良くなるような負曲率 Riemann 計量 g の条件を求める.

すると，その条件を満たす負曲率 Riemann 多様体 (R^{n+1},g) では定理が成り立つはずである.

その手順の準備として，まず Euclid 空間 E^{n+1} に極小超曲面の族 M_t を与えておき, E^{n+1} の計量を共形同値な定曲率計量に変化させたときに M_t の平均曲率がどう変化するかを解析する.

(2-3) 負の曲率一定多様体の極小超曲面の最良評価.

(1-2) で述べたように, Euclid 空間に於ける極小曲面についての評価は最良であることがわかっている.

しかしながら, H^{n+1} においては解が常微分方程式を通じて構成されており，その全体の形は数値計算による結果を除いてはわかっていないため，最良の評価が得られていない.

これについては，曲面族の和集合の境界を制御する常微分方程式を導き，その解を解析することで最良評価を得る.

(3-1) 定曲率空間の平均曲率一定曲面.

初年度は第一段階 Euclid 空間における平均曲率一定曲面を研究した.

その結果を負の定曲率空間と球面に拡張する.

これらの場合，平均曲率一定回転超曲面はよくわかっているとはいえ，その族がなす形が具体的にわかっているわけではない.

その形を記述するために，数値計算なども援用して研究をすすめる.

また，一般の定曲率空間での平均曲率一定曲面に関する最良評価を求める.

これはそれ自体として幾何学的な量を求める興味ある問題であり，また境界の個数を任意にしたときに本質的に問題となる.

とくに，半球面 S^{n+1}_+ の境界に近い時の最良評価の挙動を解析することを目標とする.

(3-2) 一般の Riemann 多様体への拡張.

初年度は第一段階として球面の場合と特別な非正曲率の Riemann 多様体の場合を研究した.

それらの成果を結合して一般の Riemann 多様体の場合に拡張する.

[2-1] 一般の Riemann 多様体で, 曲率に比べて十分小さい領域で研究する.

曲率に比べて十分小さい場合，初年度で用いた非正曲率の Riemann 多様体における評価を修正すれば，半球面 S^{n+1}_+ における評価を置き換えることができると期待される.

まずそのことを証明し，ついで初年度の (2-3) の手法を用いて“小ささ”を緩和して最良の結果を得る.

[2-2] 特別な非正曲率の Riemann 多様体を一般の Riemann 多様体に拡張する.

この証明は，(2-1) と同様，まず小さな領域に関して研究し，その領域を広げて全体にするという方針をとる.

広げる際に (2-1) の最良評価が本質的に鍵になるはずである.

４．研究成果

(1) 3 次元 Euclid 空間において次の定理を得た.

定理: xy 平面における原点中心，半径 1/2 の円板を底面とする円筒のうち中心 (1,0,0) 半径 1 の球の上部と中心 (-1,0,0) 半径 1 の球の下部にはさまれる領域を Ω とし，Ω のうち原点中心勾配 π/2 の円錐の内部にある領域の連結成分を D_1, D_2 とする.

そのとき，D_i 内の閉曲線 Γ_i のみを境界にして Ω に含まれる平均曲率 1 のコンパクト曲面は連結ではない.

(2) 3 次元 Poincare 球 B: x y z ＜1 において，ホロ球 (x-1/2) y z ＜(1/2) と Euclid 空間における錘定理の錐 y z ＜c に含まれる次のような領域 $D_\pm$ が存在する. $D_\pm$ のそれぞれに含まれる閉曲線 $\Gamma_\pm$ にたいし，境界が和集合 $\Gamma_+\cup\Gamma_-$ で，有界コンパクト連結で平均曲率の絶対値が 1 以下であるような曲面は存在しない．ここで，領域 $D_\pm$ は [0,1] 上のある関数 y = f(x) で (0,1) 上正値，$f'(0) = c$, $f'(1) = -\infty$ なるものを用いて y z ＜f(|x|) と表される.

この定理は Euclid 空間における極小曲面に関する対称錘定理の 3 次元負定曲率空間へのもっとも自然な拡張であると考えられる.

(3) Riemann 多様体 M が次の性質を持つとき,「極小曲面の分離定理が成り立つ」という．M における任意有限個
の点の配置 $\{P_i\}$ に対して，次の性質を持つ正の定数 r が存在する： 各点 P_i を中心として半径 r 以下の測地球 B_i があり，それぞれの中に閉曲線 G_i があれば，その和集合 $\cup_i G_i$ を境界とする極小曲面 S は測地球の和集合 $\cup_i B_i$ に含まれる．即ち，S は完全に分離される.

この定義を用いて，次を示した： 3 次元 Poincare 球に共形な $e^{2f}g_0$ ($|df| < 1/2$) において分離定理が成立する.

(4) 3 次元 Poincare 球に共形な Riemann 多様体 $(M,g) = (H^3, e^{2f}g_0)$ ($|df| < a < 1/2$, $f < b$) において，平均曲率の絶対値が $e^{-b}(1-2a)$ 以下の曲面についての分離定理が成立する. 即ち, M における任意有限個の点の配置 $\{P_i\}$ に対して，次の性質を持つ正の定数 r が存在する： 各点 P_i を中心として半径 r 以下の測地球 B_i があり，それぞれの中に閉曲線 Γ_i があれば, その和集合を境界とする平均曲率の絶対値が $e^{-b}(1-2a)$ 以下の曲面は測地球の和集合に含まれる.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1 件）

1. N. Koiso, On motion of an elastic wire in a Riemannian manifold and singular perturbation, Osaka J. Math., 査読あり, 52, 2015, 453-475

〔学会発表〕（計　6 件）

1. 小磯憲史，Riemann 多様体上の渦糸の方程式と非線形 Schroedinger 方程式，RIMS 共同研究「微分方程式に対する幾何解析の展開」，2011/7/25-27，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）
2. 小磯憲史，遠い閉曲線を繋ぐ平均曲率が小さい曲面の非存在，福岡大学微分幾何研究会，2013/11/2，福岡大学（福岡県・

福岡市）
3. N. Koiso, H. Urakawa, Bi-harmonic hypersurfaces in Euclidean spaces, The 5th International W orkshop on Differential Geometry and Analysis, 2014/06/01, n 虹の松原ホテル（佐賀県・唐津市）
4. 小磯憲史, 浦川肇, 2 重調和部分多様体 - B.Y . Chen 予想について, 第 61 回幾何学シンポジウム, 2014/8/25, 名城大学（愛知県・名古屋市）
5. 小磯憲史, 浦川肇, 2 重調和部分多様体 - B. Y . Chen の予想について, 日本数学会 2014 年度秋期総合分科会, 2014/09/25, 広島大学（広島県・東広島市）
6. N. Koiso, H. Urakawa, B. Y .- Chen's conjecture on hypersurfaces of Eucledian spaces, 部分多様体論・湯沢 2014, 2014/11/20, 湯沢グランドホテル（新潟県・湯沢町）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
小磯 憲史（Koiso Norihito）

研究者番号：70116028

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：