様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成２５年　３月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2012
課題番号：２３６５４０４１
研究課題名（和文）　閉曲面上に密に埋め込まれたグラフに関する研究
研究課題名（英文）　Research on graphs densely embedded on a closed surface

研究代表者
太田　克弘（OTA　KATSUHIRO）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40213722

研究成果の概要（和文）：閉曲面上の既約三角形分割を１頂点のみからなる三角形分割（ブーケと呼ばれる）から頂点分割を繰り返し生成した．トーラスにおいて既存のリストと一致していることを確認するとともに，ループがないという意味で既約な三角形分割の列挙を行った．またダブルトーラスについては三角形分割となるブーケの列挙を行った．これまでに生成したグラフデータを使った理論研究として，染色数と Hadwiger 数の関係を次数列ごとに最大値を比較する研究を行った．

研究成果の概要（英文）：We made a program generating all irreducible triangulations of a surface by applying vertex-splittings from a bouquet, one consisting of only one vertex. The list we obtained for the torus, it coincides with the list previously known. We also enumerate all triangulations which is irreducible in the sense of loopless. In addition for the double torus, we made the list of all bouquets that triangulate the surface. As a theoretical result, using the graph database we had obtained, we investigate the relation between the maximum chromatic number and the maximum Hadwiger number of graphs with each degree sequence.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：グラフ理論，三角形分割，閉曲面，染色数，Hadwiger 予想，データベース

１．研究開始当初の背景

閉曲面上に埋め込まれたグラフの組合せ構造の研究は，Robertson と Seymour らによるグラフマイナー理論により，representativity と呼ばれる不変量が十分に大きなグラフについては，平面グラフに類似する性質を持つことが知られている．しかし，representativity の低いグラフ，すなわち閉曲面上に密に埋め込まれたグラフについてはまだあまり多くのことが解明されていない．一方，閉曲面上のグラフ理論においては，ある種の縮約変形に関して既約な構造が本質となることが多い．そのようなグラフが有限個であり，それらの組合せ構造がわかると一般論が構築できる，という流れで証明される定理は，四色定理をはじめ数多く存在する．つまり，既約な構造をもつグラフは理論の本質であるにもかかわらず，その構造の解明が進んでいない，いわゆる難しいグラフのクラスとなっている．

２．研究の目的

閉曲面上に埋め込まれたグラフの研究は，Robertson と Seymour らによるグラフマイナー理論以降，非常に多くの研究がなされている．とくに，representativity と呼ばれる埋め込みのメッシュの細かさを表す指標が十分に大きいグラフについては，平面グラフと類似の性質を持つことが調べられている．一方，representativity の低いグラフについてはあまり多くのことが解明されておらず，Ringel, Youngs らによる Map color theorem などのように，完全グラフなどいくつかの特殊なグラフの種数がわかっているのみである．一方で，特定の閉曲面に埋め込むことのできるグラフの族は，辺の除去・縮約という操作に関して閉じている．このことから閉曲面上のグラフ理論においては，これらの操作により小さいグラフに変形し，既約な構造に帰着させて考えることがしばしば有効である．辺の縮約という操作により，頂点数や前述の representativity という不変量は小さくなるので，それらの小さいグラフに関する理論構築を行なうことは非常に重要であるといえる．またそのようなグラフの性質が，その閉曲面に埋め込むことのできるグラフ全体の性質をある程度既定することになる．本研究では，グラフマイナー理論が通用しない，頂点数や representativity が低いグラフ，とくに三角形分割に関して，汎用性のある一般論を構築するための基礎研究として，既約構造のデータベース化とそれらの性質解明を目的とする．

３．研究の方法

閉曲面上の三角形分割は，その辺を縮約するときに同時にその辺に接続する面を縮約することにより再び三角形分割を得る．どの辺を縮約しても多重辺やループが生じてしまうような三角形分割は，既約三角形分割と呼ばれる．本研究では，種数の低い閉曲面において既約三角形分割の全列挙を行うことを目指す．多重辺やループが生じることを気にしなければ，どんな三角形分割も辺の縮約を繰り返していくと最終的には１頂点のグラフ（ブーケ）になる．プログラムでは，ブーケグラフから辺の縮約の逆操作である頂点分割を繰り返して既約三角形分割を生成することを行う．

生成プログラムにおいては，十数頂点程度ではあるがきわめて多くのグラフを扱うことになる．とくにそれらの同型判定を効率良く行うことはプログラムのパフォーマンスにとって重要である．またグラフデータを今後の研究に用いるためにも，グラフの不変量を求めておくことは重要である．同型判定に役立つ不変量の模索に加えて，閉曲面上のグラフで古くから最も多くの研究がある染色数について，小さいグラフに対して効率良く求めるアルゴリズム開発についても模索する．

得られたデータが位相幾何学的グラフ理論の研究に資するものになるためには，関連研究について広く調査する必要があり，研究集会・国際会議へ参加し，国内外の研究者と情報交換を行う．

４．研究成果

大きく分けて，以下の３点において研究成果が挙がった．

(1) 既約三角形分割の生成

閉曲面上の三角形分割となるグラフのうち，どの辺を縮約しても多重辺が生じてしまうグラフを既約三角形分割と呼ぶ．既約三角形分割は各閉曲面に対して有限個であることが理論的に示されており，それら既約三角形分割の性質がその閉曲面上の三角形分割全体の性質を反映していることがしばしばある．したがって，既約三角形分割をすべて列挙し，それらの組合せ的性質を調べておくことは，今後の研究において重要なことである．

まず向き付け可能な閉曲面において，その既約三角形分割を生成するプログラムの基本的アルゴリズムとその実装を行った．従来の方法とは異なり，多重辺やループをもつ三角形分割にまで生成するグラフの範囲を広げ，１頂点といくつかのループからなる三角形分割（ブーケ）から頂点分割を繰り返して三角形分割を生成するプログラムの開発を行った．埋め込みの仕方まで込めた三角形分割の同型判定については，比較的単純なアルゴリズムでもある程度の効率で判定できるため，正しいプログラムであることを重視してインプリメントした．加えて，各三角形分割の自己同型写像をすべて列挙することにより，頂点分割により新たな三角形分割を生成する際に同じものを極力生成しないよう枝刈りが効率よくなされるように考慮した．結果として，単純グラフに限らず，ブーケから既約三角形分割までの間のすべての三角形分割を生成する基本的な部分が出来上がった．

トーラスについては既約三角形分割をすべて生成することができ，既存のリストと一致していることを確認した．ループや多重辺を含む三角形分割までを生成したため，副産物として，ループを含まないという意味において既約な三角形分割のリストアップがなされた．このリストは，今後の理論研究において，ループを含まない範囲で辺を縮約して

議論可能な概念，たとえば頂点彩色問題などにおいて，理論研究に貢献する可能性が大きい．

種数のさらに高い閉曲面については，まず三角形分割となるブーケの分類についてプログラムの実装を行った．ダブルトーラスについては，全部で 8 通りの非同型なブーケが存在する（図 1 参照．円周上に並んだ頂点を，この順を保ったまま 1 点に同一視して得られるものがダブルトーラス上の三角形分割を与えるブーケとなる）．また種数 3 の向き付け可能閉曲面では，1 頂点とはいえ 15 個のループが接続するため，927 通りの非同型なブーケが存在するというデータが得られた．これらから頂点分割により得られる既約三角形分割は，かなり膨大な量のデータとなることが予想され，さらなるデータ圧縮，同型判定の枝刈りなどが今後必要となることが分かった．同時に，データの公開の仕方については，今後の課題となっている．

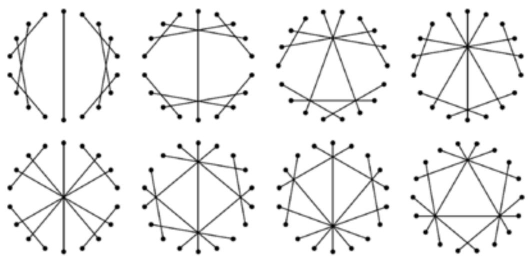

図１：ダブルトーラス上のブーケ

(2) グラフの次数列と染色数

これまでに得られたデータを理論研究に生かすためのデータ収集も行い一部成果が挙がった．

彩色問題は，四色定理をはじめとして，閉曲面上のグラフで最も盛んに研究がなされている分野である．小さいグラフで染色数を求めるアルゴリズムの効率に関して調査するために，これまでに得られたグラフ，とくに，11 頂点以下のすべてのグラフに対して染色数を求める実験を行った．結果として，単純にバックトラックするアルゴリズムによって十分な速さで染色数が求められることが分かった．各次数列において，どのような染色数を持ったグラフがどのように分布しているかについてデータ収集を行った．結果については，ホームページ上で公開している．

(3) 次数列に対する Hadwiger 予想

理論的な研究として，Hadwiger 予想および Hajos 予想の次数列版ともいうべきものについて研究の進展が見られた．

Hadwiger 予想は，平面グラフに対する四色定理を拡張したものである．与えられたグラフに対し，そのグラフのマイナーとして含みうる完全グラフの最大頂点数を，そのグラフの Hadwiger 数と呼ぶ．Hadwiger 予想は，染色数が k であるグラフの Hadwiger 数は，必ず k 以上であろうという予想である．この予想は，グラフ理論の中で現在最大の未解決問題と言っても過言ではない．その次数列版とは，次数列ごとに，その次数列をもつグラフの中で染色数，および完全グラフマイナーの頂点数について，それぞれ最大値をとり比較したものである．もちろん，後者の方が大きいであろうという予想である．この予想は，Hadwiger 予想を弱めた予想として着目され，Dvorak, Mohar らによって，より強い形で解決されている．Dvorak, Mohar は，単なるマイナーではなく，位相的マイナー，すなわち，k 頂点完全グラフの細分が含まれるような最大の k の値（Hajos 数と呼ばれる）に着目し，各次数列において，最大の染色数より最大の Hajos 数の方が大きいことを示した．

次数列ごとの Hajos 数の振る舞いについては，正則な次数列に限ってもかなり複雑である．本研究の一つの成果として，正則な場合および，準正則な場合（次数の最大値と最小値の差が 1 であるとき）について，そのようなグラフの Hajos 数の最大値を，明示的な式を与えることに成功した．本研究には，(2) で得られた，グラフのデータベースおよびその染色数を計算したテーブルの存在が大きく寄与している．

一方，Hadwiger予想の次数列版については，Guantao Chen氏(Georgia State Univ.)との共同研究により，Dvorak, Moharらの証明とは独立に，簡潔な証明を与えることに成功した．論文はプレプリント段階である．証明に用いられたアイディアは，染色数が k であることと，k頂点の完全グラフをマイナーに含むという概念を補完する新たな概念を定義したことにある．これは「連結な支配集合を含むk集合への分割(CDP)」ともいうべきもので，数学的には以下のように定義される．グラフの頂点集合をk個の部分集合V_1, V_2, ... ,V_kに分割したものがk-CDPであるとは，各部分集合V_i内に連結成分X_iが存在し，各X_iは他のすべての部分集合V_jに対して辺を出している（支配している）ようなものと定義する．与えられたグラフが持つk-CDPのうち最大となるkの値をそのグラフのCDP数と呼ぶ．任意のグラフに対して，CDP数は染色数やHadwiger数より大きいことが容易にわかる．与えられた次数列を持つグラフで最大値をとった場合，CDP数とHadwiger数が一致することが証明でき，Hadwiger予想の次数列版の証明が完結する．

このような CDP 数の研究は，Hadwiger 予想への新たなアプローチとして，今後さらなる展開が期待できる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

(1) G. Chen, K. Ota, A. Saito and Y. Zhao: Hamiltonian cycles with all small even chords, Discrete Math. 312 (2012), 1226—1240（査読有）.

〔学会発表〕（計３件）

(1) 太田克弘：Clique minors, chromatic numbers for degree sequences in graphs, 日本数学会 2013 年度年会，2013 年 3 月 20 日，京都大学.

(2) 太田克弘：Clique minors chromatic numbers for degree sequences, Hakata Workshop 2013 –Combinatorics and its applications–, 2013 年 1 月 26 日，九州大学（リファレンスビル博多駅東ビル）.

(3) 挾間龍：Hajos number and chromatic number for near regular degree sequences, 応用数学合同研究集会, 2012 年 12 月 20 日, 龍谷大学.

〔その他〕
ホームページ等
頂点数，次数列・染色数毎のグラフの個数について，下記で公開している．
http://www.math.keio.ac.jp/~ohta/graphenum.html

６．研究組織
(1)研究代表者
太田　克弘（OTA　KATSUHIRO）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：４０２１３７２２

(2)研究分担者
小田　芳彰（ODA　YOSHIAKI）
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：９０３２５０４３

(3)連携分担者
該当なし