科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2013
課題番号：２３６５４０４２

研究課題名（和文）非平衡成長パターンを実現する疑似解と方程式集合の構成

研究課題名（英文）Quasi-solutions generating non-equiribrium growth patterns

研究代表者
二宮　広和（Ninomiya, Hirokazu）

明治大学・総合数理学部・教授

研究者番号：９０２５１６１０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円、（間接経費）　　870,000円

研究成果の概要（和文）：非平衡成長パターンの疑似解の構成にあたり，興奮場における自発的スパイラル形成を取り上げた．上山らは，光BZ反応による実験や数値計算によって，非一様なミクロ状態がマクロなスパイラル形成に与える影響を調べた．二宮らは，FitzHugh-Nagumo方程式の疑似解として，wave front interaction model を取り上げ，回転スポット解，回転スパイラル解などの構成を行った．これらの研究をもとに，FitzHugh-Nagumo型方程式の特異極限問題の進行スポット解の構成に成功した．これにより，2次元における自発的スパイラル形成メカニズムが説明できるようになった．

研究成果の概要（英文）：To construct the quasi-solutions of non-equilibrium growth models, we considered the spontaneous emergence of spirals in an excitable medium. Ueyama et al and his co-workers exhibited the spiral formation influenced by the non-uniform environment using photosensitive BZ reactions and simulations. Ninomiya and his co-workers studied the wave front interaction model as the simplied model of the excitable system and constructed the rotating spots and spirals. These studies enabled us to construct the traveling spots of the singular limit problem of FitzHugh-Nagumo type systems. It revealed the mechanism of spontaneous emergence of spirals in two-dimensional excitable medium.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：パターン形成　疑似解　非平衡系　反応拡散系　進行波解

１．研究開始当初の背景

酵素反応のような複雑な現象では，関与している物質の数が多いだけでなく，対象物およびその環境の幾何学的情報などもその反応に影響を与え，さらに，不確定なゆらぎなども考慮する必要がある．そのため，ミクロな情報を含むモデリングでは膨大な自由度をもつ方程式系となってしまう．複雑な現象を記述する比較的簡単な方程式を導出するには，関与する物質の数や状態の数を減らす単純化（縮約）やミクロな要因を無視するなどの仮定が必要である．その際，失われる情報も多く，そのことが複雑な現象の本質を数理的に理解できない主要な要因と思われる．

一方，導出されたモデルを数理解析する場合，非線形問題は困難なため，実際に解析できる範囲は限られており，線形問題からの近似や分岐点近傍での解析が，その研究の多くを占めている．方程式が変われば，それに従って解析方法も異なってくる．しかし実際には線形からはほど遠い非線形なパラメータ領域でのパターン形成が，生物や化学系では見られる．このような非線形現象の数理解析においては，厳密な数理解析ができない部分を，仮定の一部に押し込んできた．

研究代表者は，これまで，反応拡散系のパターン形成の問題を研究してきており，さまざまな非平面波進行波解の構成や全域解の構成を行ってきた．この証明には，精度のよい近似解を構成する手法を開発し，それらを優解・劣解として用いることにより，少しずつ複雑なパターンの構成に成功している．そこで，パターンを再現することを主目的とし，パターンを実現する疑似的な関数を構成し，それから方程式を決定することで，厳密な数理解析ができない部分の仮定を方程式の中に取り込む方法を提案するに至った．

２．研究の目的

さまざまな現象の中でも BZ 反応や結晶成長や Hele-Shaw 問題など非平衡現象に見られる成長パターンに注目して研究を進める．成長系のパターンを再現する関数（疑似解）を構成し，これを解とする方程式集合を考える．成長系のパターンは，指状突起の形成，成長，分裂という性質を繰り返すことにより，樹枝状形状を作っている．この特徴を利用して，疑似解の構成および疑似解のみたす方程式集合の特徴付けを行う．

本研究では，反応拡散系の解の空間形状の数学的理解に焦点を絞り，パターンの数理構造と機能の理解を目的として，新たなモデリング手法を提案する．基礎方程式からモデル方程式を直接導出されない現象のモデリングでは，方程式の非線形性は，経験的・定性的に決定され，厳密に決定されるわけではない．本研究では，この不確定性を積極的に利用し，通常のモデリング手順を逆に考察する．すなわち現象に現れるパターンを再現する疑似解を構成し，これを解とする方程式集合を考える．この方程式集合に属する方程式は，無数に存在するが，その中で妥当な方程式を探す現象論的モデリングを提案する．本研究課題では，反応拡散系に限って，疑似解の満たす方程式集合の特徴付けを目的とする．

３．研究の方法

樹枝状形状を生み出す成長系に対して

1. 研究代表者(二宮)が行ってきた優解・劣解の構成手法
2. 研究分担者(上山)が Gray-Scott 方程式，Liesegang 系で培ってきた自己複製メカニズム
3. 研究分担者(若狭)が研究を進めている反応拡散系の厳密解の構成手法
4. Hele-Shaw 問題の解析手法として Howison 氏(オックスフォード大学)，Tanveer 氏（オハイオ州立大学）らが用いている複素解析的手法

によって，疑似解を構成する．次に，疑似解を解とする方程式を構成する．疑似解をみたす時空に陽に依存しない偏微分方程式が構成できるためには，疑似解の構成を慎重に行う必要がある．さらに，疑似解をみたす方程式集合の特徴付けを行う．

本研究では，さまざまな現象の中から成長系に焦点を絞って研究を進める．成長系とは，BZ 反応，結晶成長，Hele-Shaw 問題，Gray-Scott 系，Liesegang 系など散逸系に見られる代表的なパターンである．外界からのエネルギーや情報の流出入がある非線形非平衡現象であるため，樹枝状形状を定常解や進行波解などで特徴付けることができず，分岐構造や自己複製メカニズムによって説明されている．本研究で用いる方法は，以下の４ステップに大別できる．

Step 1. 疑似解の構成 （担当：二宮，上山，若狭）

Step 2. 疑似解のみたす方程式系の導出（担当：上山，若狭）

Step 3. 方程式系の導出過程から疑似解の構成へのフィードバック（担当：二宮，上山，若狭）

Step 4. 方程式集合のみたす特徴付け （担当：二宮，若狭）

４．研究成果

パターン形成は成長の先端において行われそれらが定着するというメカニズムである場合が多い．その場合には，成長による成長点の移動が非平衡状態を擬似的に生成し，結果として非平衡系におけるパターン形成が生じる．よって，成長点と共に移動する座標系においてある種の縮約が可能であろうと考えられる．

非平衡成長パターンの疑似解の構成にあたり，BZ 反応に見られるようなスパイラル形成を取り上げた．これは，FitzHugh-Nagumo 方程式のような興奮場における自発的なスパイラル形成メカニズムを表現する手法として，近似的な解の構成を行った．上山（研究分担者）らは，光 BZ 反応による実験や数値計算によって，ミクロ状態がマクロなスパイラル形成に与える影響を調べた（雑誌論文[7]）．また，ミクロモデルのマクロモデルへの影響を調べる研究として，雑誌論文[5],[6],[14],[17]を行った．

こうした結果を数学的扱い手法として，研究代表者らは，まず，wave front interaction model を用いた．このモデル方程式は，FitzHugh-Nagumo 方程式の解の遷移層を近似するものとなっている．この解を FitzHugh-Nagumo 方程式の疑似解として，解の構成を行っている．まず，円盤上での回転化学波を近似する研究を行った（雑誌論文[9]）．円盤上において一定速度で回転する形をもった解の構成およびその一意性を議論している．界面をフロント波とバック波に分けることによって解析を可能にしている．FitzHugh-Nagumo 方程式の回転疑似解となっていることになる．

次に，平面上でのスパイラル波の構成へと発展させる研究を雑誌論文[12]にまとめた．これも wave front interaction model を用いて回転スパイラル解を構成しており，FitzHugh-Nagumo 方程式の回転スパイラル波の疑似解になっている．

一方，wave front interaction model は FitzHugh-Nagumo 方程式の特異極限系にはなっていない．上記の研究結果を受けて，FitzHugh-Nagumo 型方程式の特異極限として得られる自由境界問題から孤立進行波解を得ることに成功した（雑誌論文[2]）．これにより，疑似解と特異極限の関係が明らかになり，分岐点から離れたパラメータ領域においても進行波解を構成した．

複素数に拡張した反応拡散系を考え，その解の挙動について調べた．解が実数のときは，爆発するような系になっているが，系を複素数へ拡張すると，正の実軸をまたがないような初期値では解が原点に収束することを示し，論文に発表した（雑誌論文[4]）．この手法を発展させることにより，2 次元空間上の 2 成分系の解および疑似解の特徴付けを試みているところである．

若狭（研究分担者）は単独反応拡散方程式の完全解について研究を行った．本研究課題に関して，単独反応拡散方程式の完全解の厳密解表示について考察し,時間発展する全域解と定常解を一貫して考察可能な枠組みを調べた.その準備段階として，反応拡散系における定常解を厳密に得るための簡易スキームを考案し，これを 2 種競争拡散系に応用した．その結果，あるパラメータ領域において楕円関数からなる 2 次多項式からなる厳密解を発見した．この結果に関しては，2 件の学会発表(学会発表[23]，[24])において発表が行われている．これをもとに，線形化固有値問題の固有関数や時間発展問題の完全解などの楕円関数表現等については現在検討中である．その他の研究として，双安定型のクラスに属する反応拡散方程式の特異極限問題に付随する線形化固有値問題について，理論解析を行った．楕円関数・楕円積分による直接的アプローチ，及び周期係数線型常微分方程式に対する古典的理論の適用などにより，「臨界」固有関数と呼ばれる固有関数の組に普遍的に内在する構造を明らかにした．現在，より一般的な線形化固有値問題を取り扱う理論整備について準備を進めている．

特殊な解を合成する手法の開発として，これまで研究を行ってきた階段状解の構成の手法が利用できると考えられる．解の値(レベル)によって,伝播速度が異なるような方程式および解の構成を行った．この結果は，雑誌論文[15]にまとめられている．この階段状の解が進行波解に近づくと予想されるがまだ示されていない．競争系の進行波解に関する研究として雑誌論文[10],[13]をまとめた．

以上のように，中間的な方程式の利用という新しい方法によって疑似解の構成できており，Step1～Step3 の一部までを進めることに成功した．Step3,4 に関しては，まだ十分と言えず，今後の発展が待たれる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　17　件）

1. H. Monobe and H. Ninomiya: Multiple existence of traveling waves of a free boundary problem describing cell motility, Discrete and continuous dynamical systems. Ser. B, 査読有り, 19, Number 3 (2014), pp. 789 – 799
2. Y.-Y. Chen, Y. Kohsaka and H. Ninomiya: Traveling spots and traveling fingers in singular limit problems of reaction-diffusion systems, Discrete and continuous dynamical systems. Ser. B，査読有り， 19, Number 3 (2014), pp. 697 – 714
3. M. Iwamoto, D. Ueyama, and R. Kobayashi: The Advantage of Mucus for Adhesive Locomotion in Gastropods, Journal of Theoretical Biology, 査読有り，353 (21) (2014), pp. 133-141.
4. J.S. Guo, H. Ninomiya, M. Shimojo

and E. Yanagida: Convergence and blow-up of solutions for a complex-valued heat equation with quadratic nonlinearity, Transactions of the American Mathematical Society, **査読有り**, 365, Number 5, May (2013), 2447–2467

5. K. Suzuno, A. Tomoeda, and D. Ueyama: Analytical investigation of the faster-is-slower effect with a simplified phenomenological model, Phys. Rev. E, **査読有り**, 88, 052813 (2013) [5 pages].
6. T. Masui, A. Tomoeda, M. Iwamoto, and D. Ueyama: Arch-Shaped Equilibrium Solutions in Social Force Model, Traffic and Granular Flow '11, **査読有り**, Springer (2013), pp. 179-185.
7. S. Kinoshita, M. Iwamoto, K. Tateishi, N.J. Suematsu, and D. Ueyama: Mechanism of spiral formation in heterogeneous discretized excitable media, Phys. Rev. E, **査読有り**, 87, 062815 (2013) [6 pages].
8. H. Notsu, D. Ueyama, and M. Yamaguchi: A self-organized mesh generator using pattern formation in a reaction-diffusion system, Applied Mathematics Letters, **査読有り**, 26 (2) (2013), pp.201-206
9. J.S. Guo. H. Ninomiya and C.C. Wu: Existence of a rotating wave pattern in a disk for a wave front interaction model, Communications on Pure and Applied Analysis, **査読有り**, 12-2 (2013) 1049—1063
10. C.-C. Chen, L.-C. Hung, T. Tohma, D. Ueyama, and M. Mimura: Semi-exact equilibrium solutions for three-species competition-diffusion systems, Hiroshima Mathematical Journal, **査読有り**, 43(2)(2013), pp.179-206.
11. M. Bertsch, M. Mimura and T. Wakasa: Modeling contact inhibition of growth: traveling waves, Networks and Heterogeneous media, **査読有り**, Vol. 8 (2013), no. 1, pp.131-147
12. Y.Y. Chen, J.S. Guo and H. Ninomiya: Existence and uniqueness of rigidly rotating spiral waves by a wave front interaction model, Physica D, **査読有り**, 241, Issue 20, (2012), 1758–1766
13. C.-C. Chen, L.-C. Hung, M. Mimura, and D. Ueyama: Exact traveling wave solutions of three species competition-diffusion systems, DCDS-B, **査読有り**, 17(8) (2012), pp.2653-2669.
14. N. Konno, T. Machida, T. Wakasa: The Heun differential equation and the Gauss differential equation related to quantum walks, Yokohama Math. Journal, **査読有り**, Vol. 58 (2012), pp. 53-63
15. M. Iida, R. Lui, and H. Ninomiya: Stacked Fronts for Cooperative Systems with Equal Diffusion Coefficients, SIAM J. Math. Anal., **査読有り**, **43**, (2011) No. 3, 1369-1389
16. H. Murakawa and H. Ninomiya: Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **査読有り**, 379 (2011), No. 1, 150-170
17. **増井翼, 友枝明保, 岩本真裕子, 上山大信,: 避難時に生じるアーチ状定常解解析, 第 17 回交通流のシミュレーションシンポジウム論文集**(2011), **査読有り**, pp.121-124.

〔学会発表〕(計　35　件)

1. **若狭徹:ある細胞集団モデルの進行波解析", 九州関数方程式セミナー, 福岡大学セミナーハウス, 2014 年 1 月 17 日.**
2. **若狭徹:On profiles of critical eigenfunctions for linearized problems of bistable reaction diffusion equations", 常微分方程式の定性理論の新展開, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 11 月 19 日.**
3. H. Ninomiya: Traveling spot and tip formation in excitable medium, **彰化師範大学, 台湾** Oct. 23, 2013
4. **高坂**, Y.Y. Chen, **二宮広和**: FitzHugh-Nagumo **型反応拡散系の特異極限問題の進行スポット解, 日本数学会** 2013 **秋季総合分科会, 愛媛大学 松山** 2013 年 9 月 24 日～27 日
5. H. Ninomiya: Traveling Spots of the Singular Limit Problems of FitzHugh-Nagumo Equations, One Forum, Two Cities 2013: Aspect of Nonlinear PDEs, Waseda Univ. Tokyo, Sept. 17-20, 2013
6. **二宮広和: 反応拡散系における拡散の役割, 数理生物学会** 2013 **年会 静岡大学**, 2013.9.11-13
7. **若狭徹:生命科学分野における微分方程式モデル", 日本オペレーションズ・リサーチ学会九州支部 第 1 回講演会・研究会, 九州工業大学サテライト福岡天神, 2013 年 7 月 20 日.**
8. H. Ninomiya: Traveling Spots of the Singular Limit Problems of FitzHugh-Nagumo Equations, Mathematical Modelling and Analysis in the Life Sciences, Carry-le-Rouet,

June 11-14, 2013

9. 若狭徹: 接触抑制モデルと進行波解析, 平成 24 年度藤田保健衛生大学数理講演会, 藤田保健衛生大学, 2013 年 2 月 23 日.
10. H. Ninomiya: Traveling spots and obstacle-induced spirals in an excitable medium, International Workshop on PDEs and Related Topics in Nonlinear Problems, Hiroshima University, Feb. 12, 2013
11. 若狭徹: Precise asymptotic profiles of eigenfunctions for 1D bistable reaction-diffusion equations, Swiss Japan seminar 2012, Zurich university of technology, Swiss, 2012 年 12 月 19 日.
12. H. Ninomiya: On the diffusion-induced bifurcation from infinity, Meiji One day ReaDiLab meeting, Meiji University, November 29, 2012
13. 若狭徹: Traveling wave solutions of contact inhibition model of cells, 非平衡現象の解析における発展方程式理論の新展開, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 10 月 11 日.
14. H. Ninomiya: Diffusion-induced bifurcations from infinity, 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, CIRM Luminy (Marseille, France), September 10-14, 2012
15. 若狭徹:あるクラスの特異摂動問題に付随する固有関数の極限形状について, 第 8 回非線型の諸問題, 宮崎県婦人会館, 2012 年 9 月 10 日.
16. 二宮広和, 反応拡散系における拡散の役割, 数理生命科学の新展開 ---階層間で干渉し合う形・動き・機能---, 広島大学, 2012.9.6-7
17. H. Ninomiya: Diffusion-induced bifurcations from the stationary solutions and infinity, Nonlinear Partial Differential Equations, Dynamical Systems and Their Applications, Kyoto, September 3-6, 2012
18. H. Ninomiya: Diffusion-induced bifurcations from the stationary solutions and infinity, Nonlinear Partial Differential Equations, Dynamical Systems and Their Applications, Kyoto University, September 3-6, 2012
19. 若狭徹: オーガナイズドセッション:「反応拡散系への誘い―イントロダクション―」", 第 34 回発展方程式若手セミナー, 三浦, 2012 年 9 月 3 日.
20. H. Ninomiya: Diffusion-induced blowup and bifurcation from infinity of reaction-diffusion systems, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and applications, Orlando, Florida, USA, July 1 - 5, 2012
21. 若狭徹: Precise asymptotic formulas of critical eigenfunctions for 1D bistable reaction-diffusion equations, 9-th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, Special Session 08, Orlando, Florida, the United States, 2012 年 7 月 4 日.
22. 若狭徹: Exact solutions for bifurcation problems of some reaction-diffusion systems, 9-th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, Special Session 38, Orlando, Florida, the United States, 2012 年 7 月 3 日.
23. 若狭徹:反応拡散方程式系における厳密解とその応用", 熊本大学応用解析セミナー, 熊本大学, 2012 年 6 月 2 日.
24. 若狭徹: Asymptotic formulas of eigenfunctions for 1D linearized Allen-Cahn equations, 第 4 回名古屋微分方程式研究集会, 名古屋大学多元数理科学研究科, 2012 年 3 月 7 日.
25. H. Ninomiya: Traveling spots and rotating spirals of the wave front interaction model, 20th Annual Workshop of Differential Equations, Jan. 6-8, 2012, Tamkang University, Taipei
26. H. Ninomiya: The traveling spots and rotating spirals of the wave front interaction model, Winter School in Sendai 2011: Complex Analysis Approaches to Free boundary problems, Dec. 12-14, 2011, Sendai International Center, Sendai
27. 若狭徹: 細胞集団ダイナミクスを記述する非線形拡散系の解析について, 九州関数方程式セミナー, 福岡大学セミナーハウス, 2011 年 12 月 9 日.
28. 若狭徹: Mathematical analysis for a simplified tumor growth model with contact-inhibition, Dutch Japanese workshop ``Analysis of non-equilibrium evolution problems: selected topics in material and life sciences", 2011 年 11 月 10 日.
29. H. Ninomiya: The traveling spots and rotating waves of the wave front interaction model, Reaction-Diffusion Systems in Mathematics and the Life Sciences: A conference in honor of Jacques Demongeot and Masayasu Mimura, Sept. 20-22, 2011, University of Montpellier II, France

30. H. Ninomiya: The traveling spots and rotating waves of the wave front interaction model, Front propagation, biological problems and related topics: viscosity solution methods for asymptotic analysis, Sept. 6- 9, 2011, Sapporo, Hokkaido University
31. H. Ninomiya: Reaction-diffusion approximation and related topics, One Forum, Two Cities: Aspect of Nonlinear PDE, Aug. 29-Sep. 1, 2011, National Taiwan University, Taipei
32. H. Ninomiya: Reaction-diffusion approximation and related topics, 第36回偏微分方程式論札幌シンポジウム, Aug. 22-24, 2011, Hokkaido University
33. 若狭徹：マクロスケールにおける接触抑制モデルとその解析，現象数理セミナー，九州大学，2011年8月11日.
34. H. Ninomiya: Non-planar traveling waves and entire solutions of Allen-Cahn equations, Asymptotic Dynamics Driven by Solitons and Traveling Fronts in Nonlinear PDE, Universidad de Chile, Santiago, July 11-15,　2011
35. H. Ninomiya: Non-planar traveling waves and entire solutions of Allen-Cahn equations, University of Minnesota, Minneapolis, USA, April 20, 2011

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）
○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　二宮広和（NINOMIYA，Hirokazu）
　明治大学・総合数理学部・教授
　研究者番号：９０２５１６１０

(2)研究分担者
　上山大信（UEYAMA，Daishin）
　明治大学・総合数理学部・教授
　研究者番号：　２０３０４３８９

　若狭　徹（WAKASA，Tohru）
　九州工業大学・工学研究院・准教授
　研究者番号：　２０４５４０６９