様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成２５年６月１０日現在

機関番号：３６１０２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2012
課題番号：２３６５４０４４
研究課題名（和文）全ての解析的保存量を保つ差分法による重力３体問題の軌道計算
研究課題名（英文）Orbital Integration for Gravitational Three-body Problem based on Totally Conservative Integrator

研究代表者
峯崎　征隆（MINESAKI YUKITAKA）
徳島文理大学・人間生活学部・講師
研究者番号：７０３７８８３４

研究成果の概要（和文）：互いに万有引力を及ぼし合う 3 体からなる 3 体問題は，(i) 軌道を決定する必要条件である保存量，(ii) 時間を逆向きにしても方程式の形が変わらない時間反転対称性，(iii) 平衡解軌道を持っている．従来の数値解法では，(i)，(ii) を保つのが限界であったが，(i)～(iii) を高精度に保つ数値解法を研究代表者は初めて構成した．得られた解法は，他の解法では数値的に再現できない周期軌道を極めて長時間にわたって正確に再現できる．

研究成果の概要（英文）：Three-body problem is the problem of predicting the motion of three masses that interact with each other gravitationally. This problem has the following properties: (i) it conserves some quantities which are necessary to determine its orbits; (ii) it has time reversibility. Namely, the form of its backward-time evolution coincides with that of forward-time evolution; (iii) it yields equilibrium orbits for some initial conditions. Until we proposed an orbital integration scheme which keeps all of (i), (ii) and (iii), some schemes retaining only (i) and (ii) were known. For a long time interval, the proposed scheme precisely reproduces various periodic orbits that cannot be accurately computed by other generic integrators.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	2,200,000	660,000	2860,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：エネルギー保存差分法，保存量，拘束力学系，3 体問題，N 体問題，周期軌道，平衡解軌道，近接遭遇

１．研究開始当初の背景

重力 3 体問題がもつ特徴として，(a) 全ての解析的保存量 --- エネルギー，運動量，角運動量，重心の座標を保存する．(b)Lagrange 平衡解軌道を含む様々な周期軌道を持つことが解析的に示されていることが挙げられる．

すでに，特徴（a）を満足する幾何的数値積分法として，エネルギー保存差分(Greenspan 1974)，Exactly Conservative Integrator (Shadwick 等 1996) が知られていたが，特徴（b）を保つ数値解法は知られていなかった．双方の特徴を保つ差分法を構成することによって，（重力 3 体問題を含んだ)非可積分系の軌道を正確に再現する差分法の構築への道筋をつけることができる．

２．研究の目的

1. で述べた重力 3 体問題の特徴（a)，(b) を保つ差分法を構成することが，本研究の目的であった．この目的の実現によって，頻繁な近接遭遇を伴う軌道を高精度に計算できるようになると期待できる．

３．研究の方法

(1) 一般 3 体問題向け差分法の構成

相対座標系では，重力 3 体問題を拘束ハミルトン系とみなすことができ，さらに(正準変換である）Levi-Civita 変換を用いて正則化することができる（今後，この正則化で得られた系を G3BP と呼ぶ)．この結果として得られた系に，エネルギー保存差分法の一種である d'Alembert 型スキーム（Betsch 2005,2006）を適用することによって，エネルギーを保存する差分系（今後，この系を d-G3BP と呼ぶ）を構成する．

(2) d-G3BP が Lagrange 平衡解をもつことの証明

G3BP の Lagrange 平衡解では，3 つの質点が楕円軌道上を運動し，その運動は 2 体問題の運動として記述される．さらに，隣り合う楕円軌道がもつ長軸のなす角度は 60 度である．G3BP が Lagrange 平衡解をもつ時の初期値を d-G3BP に代入することで，(a) d-G3BP と G3BP の双方で 各質点が全く同じ楕円軌道を描く．(b) 任意の時刻で 2 つの楕円軌道がもつ長軸のなす角度は 60度であることを示す．

(3) 制限 3 体問題の差分法の構成

一般 3 体問題の 1 つの質点の質量を無限小にすることによって，制限 3 体問題（今後，R3BP と呼ぶ）が得られる．全く同じ操作によって，(1) で得られた d-G3BP から制限 3 体問題の差分（今後，d-R3BP と呼ぶ）を導出する．

(4) 一般 N 体問題向け差分法の構成

重力 3 体問題と同様，相対座標系では重力 N 体問題も拘束ハミルトン系とみなすことができ，さらに（正準変換である)Levi-Civita 変換を用いて正則化することができる（今後，この正則化で得られた系を GNBP と呼ぶ)．GNBP にエネルギー保存差分法の一種である d'Alembert 型スキーム（Betsch 2005,2006）を適用することによって，エネルギーを保存する差分系（今後，この系を d-GNBP と呼ぶ）を構成する．

４．研究成果

(1) d-G3BP による一般重力 3 体問題の高精度計算の実現

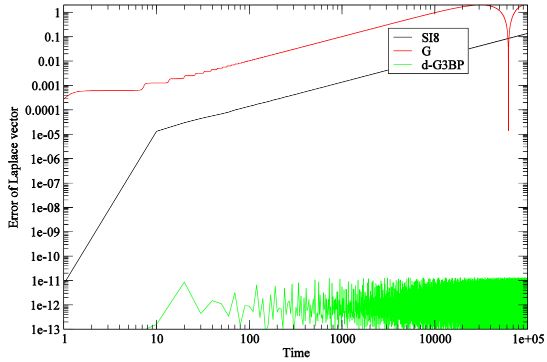
① 任意の初期値に対しては，角運動量以外の全ての保存量を保ち，Lagrange 平衡解に対しては全ての保存量を保つ．

②汎用的な数値解法が持たない時間可逆性を d-G3BP はもつ．

③ 他の数値解法では再現できなかった，遷移曲線近傍で安定な Lagrange 正三角形平衡解に対応する軌道を，d-G3BP は長時間にわたって再現できる（グラフ 1)．

以上のことから，従来の数値解法と比較して，

d-G3BP は極めて高精度に平衡解軌道を再現できることがわかる．そのため，長時間にわたっては高精度に再現することが難しかった，平衡点近傍を通過する軌道（馬蹄形軌道等）も高精度で再現することが可能になるものと期待される．



グラフ 1： 3 体問題における Lagrange 正三角形平衡点からのずれ（d-G3BP は緑色）

(2) d-G3BP が重力 3 体問題と同じ平衡解軌道をもつことの証明

重力 3 体問題の周期軌道を数値的に再現できる数値解法として，高次の汎用的数値積分法や幾何的数値積分法が知られている．しかしながら，これらの手法がどのくらい長く軌道を再現できるのかは不明であった．それに対して，力学的に安定な Lagrange 平衡解に限るが，原理的には永久に d-G3BP は軌道を再現することが証明できる． この事実から，d-G3BP が既存の数値解法より信頼できることが計算結果をもたらすことが期待できる．

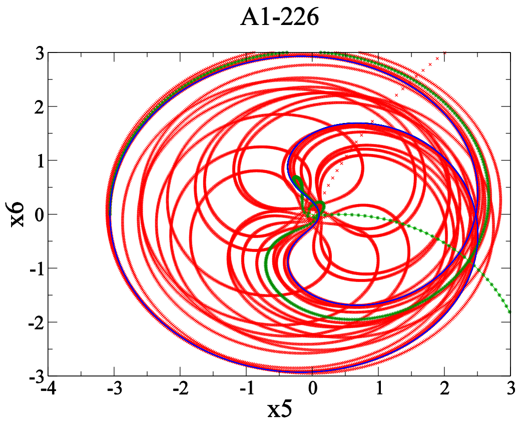
(3) 円， 楕円制限 3 体問題の両方に対応できる差分スキーム d-R3BP の導出

d-R3BP は以下の特長を持っている．

① 2 つの主星（質量が無視できない質点)がもつ楕円軌道を厳密に再現する．

② 伴星（無限小質量の質点）が関係した保存量を時間ステップ幅 1 次の精度で保つ．円制限 3 体問題で， この保存量は Jacobi 積分に対応する．

③ 既存の汎用的，幾何的数値積分法と異なり， 円制限 3 体問題がもつ Broucke の周期軌道（Broucke 1968）（グラフ 2)，馬蹄形軌道（Barrabes and Mikkola，2005）を長時間にわたって高精度に再現する．



グラフ 2： 円制限 3 体問題における Broucke の周期軌道（d-GNBP は青色）

円問題では，伴星が関係した保存量として Jacobi 積分が知られていたが， 楕円問題でこれに対応する保存量は知られていなかった．研究代表者はこの保存量を発見し， d-R3BP がそれを近似的に保存することを解析的に示した．その結果として， 既存の解法では再現できない軌道を d-R3BP は再現できる．

また， 既存の制限 3 体問題向け数値解法は，円問題の場合に回転座標系，楕円問題の場合には脈動座標系を用い， 非常に煩雑である． それに対して，提案した d-R3BP は双方の場合で同じ座標系を用い，非常に簡単である．

(4) 一般重力 N 体問題の高精度計算の実現

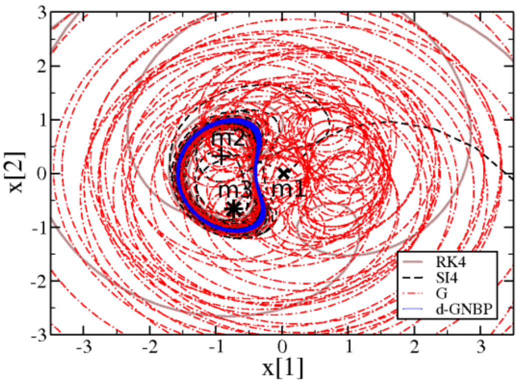
以下の特長をもつ N 体問題向けの差分法 (d-GNBP) を導出した．

① 任意の初期値に対して， 角運動量以外の全ての保存量を保つ．

② 時間可逆性をもつ．

③ 全ての保存量を保つエネルギー保存差分

法（Greenspan 1974）ですら再現できない舞踏解を高精度に再現する．
④ 正三角形の頂点に位置する 3 つの平衡点を囲む閉軌道を無限小質量の質点が運動する解が，制限 4 体問題には存在する．汎用的な数値解法でこの軌道を再現できないが，d-GNBP では再現できる（グラフ 3）．



グラフ 3: 制限 4 体問題での無限小質量がもつ質点の閉軌道（d-GNBP は青色）

以上の事実から，従来の数値解法と比較して，d-GNBP は GNBP がもつ周期軌道を高精度で再現できることがわかる． 特に再現が難しかった， 平衡点近傍を通過する軌道（馬蹄形軌道等）を高精度で再現することが可能になると期待できる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
(1) Yukitaka Minesaki，ACCURATE ORBITAL INTEGRATION OF THE GENERAL THREE-BODY PROBLEM BASED ON THE D’ALEMBERT-TYPE SCHEME，The Astronomical Journal，査読有，145 巻，2013，63 (14 ページ)
DOI：10.1088/0004-6256/145/3/63

(2) Yukitaka Minesaki，LAGRANGE SOLUTIONS TO THE DISCRETE-TIME GENERAL THREE-BODY PROBLEM，The Astronomical Journal，査読有，145 巻，2013，64 (9 ページ)
DOI：10.1088/0004-6256/145/3/64

(3) Yukitaka Minesaki,，Accurate Orbital Integrator for Restricted Three-Body Problem as Special Case of Discrete-Time General Three-Body Problem，The Astronomical Journal，査読有（5 月 27 日受理)

〔学会発表〕（計３件）
(1) 峯崎　征隆，重力 3 体問題の全保存型差分法，GCOE セミナー -グローバル COE 事業「数学新展開の研究教育拠点」，2011 年 5 月 10 日，東京大学

(2) 峯崎　征隆，全保存型差分法による重力３体問題の差分化とその性質，ハミルトン力学系セミナー，2011 年 7 月 8 日，大阪大学

(3) 峯崎征隆，重力３体問題の保存型差分，天体力学Ｎ体力学研究会 -変分法と周期解，2011 年 9 月 2 日，大阪大学

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

６．研究組織
(1)研究代表者
峯崎　征隆（MINESAKI YUKITAKA）
徳島文理大学・人間生活学部・講師
研究者番号：７０３７８８３４

(2)研究分担者
該当者なし

(3)連携研究者
該当者なし