

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 13 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：23654049

研究課題名(和文)相空間解析における定量的な方法論の構築

研究課題名(英文)Construction of quantitative methodology in phase space analysis

研究代表者

杉本 充 (Sugimoto, Mitsuru)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：60196756

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：この研究は、偏微分方程式論における解の定量的な情報を相空間解析により導き出すための包括的で新しい方法論を構築することを目指したものであり、まずは基本課題としてそのための理論整備を行い、さらには応用課題として偏微分方程式の様々な諸問題にも取り組んだ。これにより、特に「モジュレーション空間の基礎理論とその応用」「フーリエ積分作用素の有界性」「分散型方程式に対する平滑化評価式」に関して顕著な成果をあげることができた。またこれらの研究の遂行にともない、国内外の偏微分方程式論および調和解析学の研究交流を目的とした様々な国際研究集会を組織し、国際的な人的交流においてもかなりの成果をあげることができた。

研究成果の概要(英文)：The objective of this research project was to establish a new and comprehensive methodology to deduce quantitative information of solutions to partial differential equations through phase space analysis, and as a fundamental subject we first prepared theoretical tools for the purpose, then we further applied them to various problems of partial differential equations. In particular we successfully got remarkable outcome on “fundamental theory of modulation spaces and its application”, “boundedness of Fourier integral property” and “smoothing estimates for dispersive equations”. During the research period, we organize various kind of international workshops aiming academic interaction between partial differential equations and harmonic analysis, and they resulted in great success in international human exchange.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：相空間解析 フーリエ積分作用素 モジュレーション空間 時空間評価式 分散型方程式 シュレディンガー方程式

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式論の研究において、相空間上で議論を展開することにより解の性質に関する情報を引き出す方法論(相空間解析)は、解析力学の登場以来古くから用いられている手法のひとつである。相空間解析の柱である正準変換を具現化する道具としてのフーリエ積分作用素の理論は、Hörmander (Acta. Math. 1971) によりほぼ確立されたが、それを用いて定量的な解析を扱おうとした場合、ただちに具体的な関数空間上での有界性の問題に直面する。実際、大域的な正準変換を記述するフーリエ積分作用素が L^2 -空間で有界であることが示されるまでには、Ruzhansky-Sugimoto (Comm. PDE. 2006) まで待たなければならなかった。さらに Seeger-Sogge-Stein (Ann. Math. 1991) の結果によれば、 L^2 -有界なフーリエ積分作用素であっても一般には L^p -有界 ($p \neq 2$) とはならない。したがって、 L^p -空間の自然な代用物を見つけ出すことも求められていた。一方、1980 年台初頭に Feichtinger により導入されたモジュレーション空間は、時間変数と周波数変数を同時に扱う短時間フーリエ変換を用いて定義されており、正準変換の基本的な考え方も符合する L^p -有界の代用物としての有力な候補と考えられていた。

2. 研究の目的

この研究は、特に解の定量的な情報 (L^p -型評価など) を相空間解析により導き出すための、包括的で新しい方法論を構築することを目指したものである。さらに、この方法論を非線形問題などの偏微分方程式の諸問題に応用し、「比較原理」「フロー法」などの評価式導出の際の新しいアイデアも取り込みながら、変数係数の場合など方程式の一般化へのブレークスルーの可能性をも探るものである。そのため、まずはフーリエ積分作用素の様々な空間における有界性やモジュレーション空間の基本的性質の解明を基本課題として取り組むことによって、定量的な相空間解析の基本的道具を整備し、さらには応用課題として偏微分方程式の様々な諸問題にも取り組む。

3. 研究の方法

以下の基本課題と応用課題に対して、順次アプローチした：

(1) 基本課題

定量的な相空間解析のための基本的な道具を整備する。具体的には以下の通りである。

- ① 正準変換を実現するフーリエ積分作用素のクラスに関し、そのモジュレーション空間や大域的 L^p -空間などでの有界性を考察する。
- ② モジュレーション空間上での非線形作用について考察する。
- ③ モジュレーション空間と既存の関数空間との包含関係を決定する。

間との包含関係を決定する。

(2) 応用課題

基本的な方針として、

- ・方程式を標準形に変形する
- ・標準形に対する評価式を求める
- ・もとの方程式に関する評価式を導く

という相空間解析の処方箋を、モジュレーション空間を含む様々な関数空間上で実行する。その際、基本課題の成果を適宜用いる。具体的には以下の通りである。

- ① 定数係数の分散型方程式に対する平滑化評価式・Strichartz 評価式などの時空間評価式を、上記処方箋にしたがって導出する。
- ② その際、標準形に対する時空間評価式としては、最良定数をとる最も精密なものを採用する。
- ③ 変数係数の場合には、定数係数の場合とは異なり、正準変換の際に誤差項が現れてくる。したがって、主部が標準形であるが低階項をもつ場合の時空間評価式を求めておく必要がある。低階項をもつ場合のひとつのモデルケースとして、まずはポテンシャル項を持つ場合を考察する。
- ④ こうして得られた時空間評価式を応用して、非線形分散型方程式の初期値問題の解の時間大域的な存在を示す。その際、基本課題における非線形作用に関する成果も採用する。

4. 研究成果

上記課題に関して、以下の成果を収めた：

(1) モジュレーション空間の基礎理論とその応用

- ① モジュレーション空間およびその類似物である Wiener amalgam 空間とソボレフ空間との間における包含関係を決定した。
- ② モジュレーション空間上で非線形作用や正準変換が閉じるための十分条件を導出した。
- ③ モジュレーション空間の理論の非線形問題への応用として、双曲-双曲型の Devey-Stewartson 方程式の初期値問題の時間大域的な存在を、特異な初期値を許容する形で証明した。

(2) フーリエ積分作用素の有界性

- ① 双曲型方程式の初期値問題において、これまで解の大域的な L^p -評価式は定数係数の方程式の場合にのみ知られていたが、今回の研究成果により、一般の変数係数の場合も考察できるようになった。
- ② フーリエ積分作用素の L^2 -有界性などを論じる際に相関数の導関数が与える写像の逆写像を考察する必要が生じるが、最も標準的であるはずの斉次な相関数

の場合においては、原点での特異性のために逆写像が大域的に存在するかは必ずしも自明ではない。この問題に関して一つの解決策を提示した。

(3) 分散型方程式に対する平滑化評価式

- ① シュレディンガー方程式に対する様々なタイプの平滑化評価式の最良定数および最良を実現する関数の存在・非存在を決定するとともに、さらにそれらの臨界型の場合にまでこの研究を推し進めた。これらの結果は、比較原理を用いることにより直ちにより一般の分散型方程式の場合の結果を導く。
- ② 副産物としてある種の制限定理における最良定数を実現する関数も決定した。
- ③ 非斉次方程式に対する平滑化評価式の正準変換による導出法を与えた。この問題に関しては、これまで斉次方程式の場合には比較原理を合わせ用いることによりある程度の結果が得られていたが、非斉次方程式の場合には比較原理が確立されておらず、ここでは正準変換の方法だけで何処まで結果が得られるのかについて論じた。
- ④ スペクトル論的比較原理を確立した。以前 Ruzhansky 氏との共同研究により、定係数分散型方程式の平滑化評価式に対する比較原理を見いだしていたが、この成果により、変数係数やポテンシャル項を持った場合、さらには一般領域の場合にまで拡張できるようになった。

また、これらの研究の遂行にともない、国内外の偏微分方程式論および調和解析学の研究交流は、必要不可欠なものであった。その目的のため、以下の様な国際研究集会を積極的に組織した：

- *RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」(July 4-6, 2011)
- *国際研究集会「Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators」Aalto University, Helsinki, Finland (June 25-30, 2012)
- *RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」(July 2-4, 2012)
- *RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」(July 8-10, 2013)
- *RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」(June 30-July 2, 2014)

これらの活動は、国際的な人的交流という意味においても、かなりの成果があったものと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- [1] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, On global inversion of homogeneous maps, *Bull. Math. Sci.* **5** (2015), 13-18. (査読有)
- [2] Neal Bez & Mitsuru Sugimoto, Optimal constant for a smoothing estimate of critical index, *Fourier Analysis, Trends in Mathematics*, 1-7, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2014. (査読有)
- [3] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Recent progress in smoothing estimates for evolution equations, *Progress in Partial Differential Equations, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* **44**, 287-302, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2013. (査読有)
- [4] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Smoothing properties of inhomogeneous equations via canonical transforms, *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino* **70** (2012), 165-182. (査読有)
- [5] Michael Ruzhansky, Mitsuru Sugimoto & Baoxiang Wang, Modulation Spaces and Nonlinear Evolution Equations, *Progr. Math.* **301**, 267-283, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012. (査読有)
- [6] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Structural resolvent estimates and derivative nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **314** (2012), 281-304. (査読有)
- [7] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Smoothing properties of evolution equations via canonical transforms and comparison principle, *Proc. London Math. Soc.* **105** (2012), 393-423. (査読有)
- [8] Mitsuru Sugimoto, Naohito Tomita & Baoxiang Wang, Remarks on nonlinear operations on modulation spaces, *Integral Transforms and Spec. Funct.* **22** (2011), 351-358. (査読有)
- [9] Michael Ruzhansky & Mitsuru Sugimoto, Weighted Sobolev L^2 estimates for a class of Fourier integral operators, *Math. Nachr.* **284** (2011), 1715-1738. (査読有)
- [10] Michael Ruzhansky, Mitsuru Sugimoto, Joachim Toft & Naohito Tomita, Changes of variables in modulation and Wiener amalgam spaces, *Math. Nachr.* **284** (2011), 2078-2092. (査読有)
- [11] Masaharu Kobayashi & Mitsuru

Sugimoto, The inclusion relation between Sobolev and modulation spaces, J. Funct. Anal. 260 (2011), 3189-3208. (査読有)

他 1 件

[学会発表] (計 22 件)

- [1] 2014年9月7日 第3回岐阜数理解析学会 (於飛騨高山まちの博物館) 「分散型方程式の比較原理に関する最近の話題」
- [2] 2013年12月22日 日本数学会 関数方程式論分科会研究集会 -微分方程式の総合的研究- (於 東京大・数理) 「分散型方程式の平滑化評価式に関する最近の進展」
- [3] 2013年12月13日 京都大学数理解析研究所研究集会 -スペクトル・散乱理論とその周辺- 「Optimal constants and extremisers for smoothing estimates of Kato-type」
- [4] 2013年11月4日 研究集会 (於スペイン・バルセロナ CRM) -Joint CRM-Isaac Conference on Fourier Analysis and Approximation Theory- 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」
- [5] 2013年10月24日 研究集会 (於韓国・ソウル国立大) -1st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications- 「Optimal constants and extremisers for smoothing estimates of Kato-type」
- [6] 2013年8月9日 研究集会 (於クラクフ・Pedagogical 大) -The 9th ISAAC Congress- 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」
- [7] 2013年5月20日 研究集会 (於イスラエル・ナハリヤ) -Complex Analysis & Dynamical Systems VI- 「Recent progress in smoothing estimates for Schrödinger equations」
- [8] 2012年12月19日 研究集会 Al-Khorezmiy 2012 (於ウズベキスタン・ウズベキスタン国立大) 「Structural resolvent estimates and derivative nonlinear Schrödinger equations」
- [9] 2012年10月17日 研究集会 (於オーストリア・ESI) Modern Methods of Time-Frequency Analysis II, Workshop “Phase space methods for pseudo-differential operators” 「Optimal constants and extremisers for some smoothing estimates」
- [10] 2012年6月25日 研究集会 (於フィンランド・Aalto 大) Fourier

Analysis and Pseudo-Differential Operators 「Optimal constants for some smoothing estimates」

- [11] 2012年3月21-22日 CREST 流体数学講演会 早稲田大学理工学術院 「双曲型方程式初期値問題の解の減衰評価について」
- [12] 2011年12月20日 研究集会 (於台湾・NCTS) 2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and Geometric Analysis 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」
- [13] 2011年9月19日 研究集会 (於九州大学医学部 百年講堂) The 4th MSJ-SI “NONLINEAR DYNAMICS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS” 「A vector fields approach to smoothing and decaying estimates for equations in anisotropic media」
- [14] 2011年8月26日 研究集会 (於ロシア・ロシア諸民族友好大学) The 8th ISAAC Congress 「Smoothing estimates for non-dispersive equations」
- [15] 2011年6月17日 研究集会 (於オーストリア・シュトローブル) From Abstract to Computational Harmonic Analysis, Strobl 2011 「The inclusion relation between Sobolev and modulation spaces」

他 7 件

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~sugimoto/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉本 充 (SUGIMOTO MITSURU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：60196756

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10437337