

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654050

研究課題名(和文) 超幾何と五角数定理の表現論的融合

研究課題名(英文) Unified viewpoint for hypergeometric functions and the pentagonal number theorem based on representation theory

研究代表者

梅田 亨 (UMEDA, Toru)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00176728

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円、(間接経費) 480,000円

研究成果の概要(和文)：五角数定理とその一般化は、無限サイズの行列の組が、或る差分関係式(五角数方程式)を満たす時、その行列の跡等式として得られる。五角数方程式の内容は、二つの行列が殆ど共軛ということだが、それにも拘わらず、跡に差がでる(アノマリー)という無限サイズ特有の現象が起きるのである。五角数方程式の解を具体的に書くことで様々な興味深い等式、特に $q$ -超幾何級数の反転公式が得られる。この背後にある、不変式論・表現論、及び、非可換世界を明らかにすることで、超幾何の地平を拓いた。特に、一見あきらかでない対称性を双対性(dual pair)の視点から取り出し、群論的機構を追究した。

研究成果の概要(英文)：The famous pentagonal number theorem by Euler has been extended as the description of the anomaly, that is, the difference of the trace of two matrices of infinite size, which are almost conjugate. Notable examples, among them, are inversion formulas for  $q$ -hypergeometric series. We investigate the mechanism behind that phenomena from the invariant-theoretic and representation-theoretic points of view, so that some new horizon for the hypergeometric series is opened. Dual pair theory is the key to withdraw the symmetry, even if it is not apparent.

研究分野：数理科学系

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：超幾何関数 五角数定理 表現論 不変式論  $q$ -analogue

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 五角数定理とは 1741 年に Euler が発見した無限和と無限積の間の等式である。証明 Euler 自身によって 1750 年になされたが、その後、テータ級数に関係した一般化が発見され、その方向での発展はよく知られている。これに対し、我々は Euler 自身の証明に立ち戻り、別の方向での一般化を見出した。それは無限サイズの行列の跡等式である。その観点から、さまざまな公式が得られるが、特に、 $q$ -超幾何級数に関する変換公式との関係が見出され、新たな地平が切り開かれる可能性が出てきた。表現論・不変式論と超幾何の新たな融合である。

(2) この証明の機構は無限サイズ特有の「アノマリー」の現われと看做すこともできる。その視点から、dual pair という双対原理の拡張を発散級数の扱いにも関係した不変式論的解釈として確立することが望まれる。また、群の共軛類の箇数と分割数の類似を追究することで、アノマリーの群論的扱いを可能にすることで、超幾何の変換公式のもつ不変式論的性格が期待できる。

### 2. 研究の目的

五角数定理とその一般化は、二つの無限サイズの行列に関する差分関係式(五角数方程式)の解から得られる。この二つのトレースに差というアノマリーが生じることがポイントである。ここで、既に解明が進んでいる一般的証明機構を精密に追究し、その背後にある非可換世界を明らかにすることで、双対性の新たな視点を広げ、超幾何と表現論・不変式論の融合を図る。

### 3. 研究の方法

(1) 可換なレベルでも無限サイズ特有の現象である「発散級数」の総和法とのつながり、及び、「五角数方程式」の解に関係する対称式( $q$ -超幾何を含む或る種の「特殊多項式」)によってアノマリーの記述がどの程度で切るか探る。また、五角数方程式のもつ「乗法的性格」を追究することで、「五角数方程式」の解の空間の明快な理解を得る。

(2) 分割数と群の共軛類の箇数の関連について Howe-Feit の論文を分析し、五角数定理と超幾何級数のあいだにあると想定される「群論的」機構について研究する。ここでは誘導表現の一般化が役に立つであろう。それによって「相互法則」的な視点が五角数定理にもたらされると期待できる。

(3) 典型 Lie 環の冪零共軛類の退化の問題との関連も視野に入れて研究を進める。これは別の見方では  $sl_2$  という Lie 環の表現のテンソル積に関わる。この視点が対称性にどれくらい寄与するか考察し、跡等式としての五角数定理が、跡公式としての解釈を許す

か調べる。

(4) 非可換留数の観点から、伊藤代数の無限テンソル積表現を調べる。古典的には、留数などの定式化は、代数曲線論を通じて電磁気学と結びつく。さらに Clifford 代数を用いた「共形変換」の扱いは、Lorenz boost の対応物として、超幾何に関係していると期待される。これを、非可換三項定理も含めて非可換不変式論的研究と融合する。

### 4. 研究成果

(1) 以下の研究発表を行った:

[1]  $sl_2$  の三項定理とその応用

(数理研研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」, 6.19--22 代表: 木本一史),  
2012.6.19, 14:00--14:50

[2] 誘導表現の一般化について

表現論シンポジウム 鹿児島 2012.12.4 -- 7  
(代表: 伊藤稔, 落合啓之), 2012.12.4

[3] 直交 Lie 環の冪零元の共軛性について

鹿児島表現論セミナー(平井武先生喜寿記念)  
2012.12.7 16:30--17:00

[4] 誘導表現の一般化について I, II, III

九州大学表現論セミナー(主催: 落合啓之)  
2013.3.6 14:00 -- 16:30  
2013.3.7 11:50 -- 13:00  
2013.3.8 11:40 -- 13:20

[5] Poincare-Birkhoff-Witt の定理の群論的証明

九州大学表現論セミナー  
2013.3.8 14:30 -- 16:10  
九州大学伊都キャンパス 中セミナー室 1

[6] 単位球の自己同型と Clifford Algebra,

表現論ワークショップ 2013 (野村隆昭氏還暦記念) 2013. 9.11--13

2013.9.11 15:30 -- 16:10

於 京都大学理学研究科セミナーハウス

(2) 上記の研究発表は、研究の方法で述べた項目のうち、[1]は(4)と、[2]は(2)と、[3]は(3)と、[4]は(2)と、[5]は(4)と、[6]は(4)と関連するものである。

他に、Stirling 数の相反法則と関係して、対称式に関する、少し変わった視点を導入し、考察した(ノートのみ)が、それは、任意の数列を恰も規則正しい数列かの如く看做すものである。これは、五角数方程式の解の表示に役立つ。Stirling 数の相反法則は、逆階乗級数による展開の公式である

(3) 超幾何型の特殊多項式として、Krawtchouk 多項式というものがある。これに関連して、雑誌『数学セミナー』連載の記事に、Boole 環の加法群の表現論に関する題材として組み合わせ論的観点からの問題を出したところ、修士で指導している学生の川村君が採り上げ、修士論文となる研究にまとめた。これは有限体上の概均質ベクトル空間に関係した群不変フーリエ変換の核函数の決定であるが、別の視点で言えば、球函数の決定でもある。ここでは、なぜ超幾何型のものが現われるかという機構までは解明できていない。しかし、差分関係式との関連から、将来的に五角数方程式とのつながりがでることも期待される。

(4) 連携研究者の野海正俊は、楕円超幾何およびパルヴェ方程式を研究し、群対称性の見地からそれらの本性を解明してきた。特に超幾何の反転公式は一般化された五角数定理の例を与え、本研究の動機となった重要なものである。

(5) 連携研究者の伊藤稔は、非可換不変式論を研究し、特に伊藤代数という非可換環を構成して、普遍包絡環の中心元の記述に著しい寄与をなした。現在は、不変式環の生成系と関係式を、より簡明な図式的表示を用いて与え、例えば Cayley-Hamilton 型の定理を外積代数を成分とする行列において確立し、多項式関係を持つ非可換環におけるいくつかの定理を簡易化するとともに、あたらなものを与えた。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6 件)

[1] 梅田亨,  $sl_2$  の三項定理とその応用, 数理研講究録 {1825}(2013)“表現論と非可換調和解析の展望”, 6.19--22 代表: 木本一史), 1—25 [査読なし]

[2] 梅田亨, 誘導表現の一般化について 表現論シンポジウム講演集 2012 鹿児島 2012.12.4 -- 7 (代表: 伊藤稔, 落合啓之) 7—17 [査読なし]

---

[1] M.Noumi, S.Tsujimoto and Y.Yamada: Pad $\check{e}$  interpolation for elliptic Painlev $\check{e}$  equation, {Symmetries, Integrable Systems and Representations} (Kenji Iohara, Sophie Morier-Genoud, Bertrand R $\check{e}$ my Eds.), pp. 463--482, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 40, Springer 2013 [査読あり]

---

[1] 著者: Minoru Itoh 論文標題: Extensions of the tensor algebra and their applications 雑誌: Communications in Algebra 巻: 40 ページ: 3442--3493 発行年: 2012 DOI:10.1080/00927872.2011.590952 査読の有無: 有

[2] 著者: 伊藤稔 論文標題: Invariant Theory in Exterior Algebras 雑誌: 数理解析研究所講究録 巻: 1825 ページ: 26--34 発行年: 2013 DOI:なし 査読の有無: 無

[3] 著者名: Minoru Itoh 論文標題: Invariant theory in exterior algebras 雑誌名: Geometry, Number Theory and Representation Theory (KM Kyung Moon SA, Seoul) 巻: なし ページ: 113--123 発行年: 2013 DOI:なし 査読の有無: 無

〔学会発表〕(計 19 件)

梅田亨 :

[1] 梅田亨,

sl<sub>2</sub> の三項定理とその応用

(数理研研究集会「表現論と非可換調和解析  
の展望」, 6.19--22 代表: 木本一史),  
2012.6.19, 14:00--14:50

[2] 梅田亨,

誘導表現の一般化について

表現論シンポジウム 鹿児島 2012.12.4 -- 7  
(代表: 伊藤稔, 落合啓之), 2012.12.4

[3] 梅田亨,

直交 Lie 環の冪零元の共軛性について

鹿児島表現論セミナー(平井武先生喜寿記念)  
2012.12.7 16:30--17:00

[4] 梅田亨,

誘導表現の一般化について I, II, III

九州大学表現論セミナー(主催: 落合啓之)  
2013.3.6 14:00 -- 16:30

2013.3.7 11:50 -- 13:00

2013.3.8 11:40 -- 13:20

[5] 梅田亨,

Poincare-Birkhoff-Witt の定理の群論的証明

九州大学表現論セミナー

2013.3.8 14:30 -- 16:10

九州大学伊都キャンパス 中セミナー室 1

[6] 梅田亨,

単位球の自己同型と Clifford Algebra,

表現論ワークショップ 2013 (野村隆昭氏還暦  
記念) 2013. 9.11--13

2013.9.11 15:30 -- 16:10

於 京都大学理学研究科セミナーハウス

=====

野海正俊:

[1] M. Noumi,

An elliptic extension of Askey-Wilson  
polynomials and associated elliptic Schur

functions, {Bethe Ansatz, Quantum Groups and  
Beyond}, March 7--9, 2013, RIMS Kyoto  
University, Kyoto, Japan

(March 8, 2013)

[2] M. Noumi,

Elliptic Askey-Wilson functions and  
associated elliptic Schur functions,

{Elliptic Integrable Systems and Hypergeometric  
Functions,}

July 15--19, 2013, Lorentz Center, Leiden, The  
Netherlands

(July 15, 2013)

[3] M. Noumi,

Remarks on  $B_n$  interpolation functions,

JSPS-NWO Seminar: {Analysis, Geometry and

Group Representations for Homogeneous Spaces},

August 26--30, 2013,

Nagoya University, Nagoya, Japan

(August 29, 2013)

[4] M. Noumi,

Discrete Painlevé equations and special  
functions,

57th Annual Meeting of the Australian

Mathematical Society,

September 30--October 3, 2013,

University of Sydney, Sydney, Australia

(Plenary talk, October 1, 2013)

[5] M. Noumi,

Padé approximations and hypergeometric series,

2014 Joint Mathematical Meeting,

AMS Special Session: {Algebraic and Analytic

Aspects of Integrable Systems

and Painlevé Equations},

January 15--18, 2013, Baltimore Convention

Center, Baltimore, U.S.A.

(January 18, 2014)

[6] M. Noumi,

Affine Weyl groups, Painlevé equations and

special functions: I, II,

The 6th TIMS-OCAMI-WASEDA Joint

International Workshop on  
{ Integrable Systems and Mathematical Physics},  
March 22--26, 2014, National Taiwan University,  
Taipei, Taiwan  
(March 22 and 24, 2014)

=====

伊藤稔 :

- [1] 発表者 : Minoru Itoh 発表表題 : A mixture of the tensor algebra and the infinite symmetric group and its application to the Schur-Weyl duality 学会等名 : MPI-Oberseminar 発表年月日 : 2011 年 5 月 5 日 発表場所 : Max-Planck-Institute for mathematics, Germany
- [2] 発表者 : Minoru Itoh 発表題目 : Invariant Theory for Exterior Algebras 学会等名 : The 7th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar 発表年月日 : 2012 年 2 月 16 日 発表場所 : 鹿児島大学
- [3] 発表者 : 伊藤稔 発表表題 : Invariant theory in exterior algebras 学会名 : RIMS 研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」 発表年月日 : 2012 年 6 月 19 日 発表場所 : 京都大学
- [4] 発表者 : 伊藤稔 発表表題 : Cayley-Hamilton 型定理の系列と不変式論 学会等名 : 南九州代数系集会 発表年月日 : 2012 年 8 月 29 日 発表場所 : 熊本大学
- [5] 発表者 : Minoru Itoh 発表表題 : Invariant Theory for Exterior Algebras 学会等名 : International Conference on Geometry, Number Theory and Representation Theory 発表年月日 : 2012 年 10 月 10 日 発表場所 : Inha University, Korea

- [6] 発表者名 : 伊藤稔 発表表題 : Cayley-Hamilton 型定理と不変式論 学会等名 : 2013 年度表現論シンポジウム 発表年月日 : 2013 年 11 月 28 日 発表場所 : マホロバ・マインズ三浦 (神奈川県三浦市)
- [7] 発表者名 : 伊藤稔 発表表題 : Cayley-Hamilton type theorems of higher order and second fundamental theorem of invariant theory 学会等名 : RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組み合わせ論の研究」 発表年月日 : 2014 年 3 月 6 日 発表場所 : 京都大学

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

梅田 亨 (UMEDA, Toru)  
京都大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号 : 00176728

##### (3) 連携研究者

野海 正俊 (NOUMI, Masatoshi)  
神戸大学・自然科学系先端融合研究環重点  
研究部・教授  
研究者番号 : 80164672

伊藤 稔 (ITOH, Minoru)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号 : 60381141