

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654051

研究課題名(和文) 確率非線形分散型方程式の可解性理論と解の漸近挙動

研究課題名(英文) Solvability and asymptotic behavior of solution for stochastic nonlinear dispersive equations

研究代表者

堤 誉志雄 (TSUTSUMI, YOSHIO)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10180027

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：体積の測り方(測度)をうまく選ぶと、発展方程式の解が作る流れの体積を時間に関し変化しないようにできることがある。このような測度を不変測度という。無限次元空間で不変測度を構成する事はそれ自身興味深いだけでなく、不変測度を用いて解の大域挙動について解析できるため、非線形発展方程式論の観点から重要な研究課題である。形状記憶合金の数理モデル方程式であるFalk方程式に対し、Gibbs測度とKuksin流の不変測度を構成し、それらの特徴を比較した。また、電離層に於ける電磁場スペクトルの擾乱現象を記述する加法ノイズ付きZakharov方程式の初期値問題に対し、時間大域解の存在を証明した。

研究成果の概要(英文)：If the scale or the measure is appropriately chosen, the volume of flows generated by evolution equations can be conserved. Such a measure is called an invariant measure. It is very important to construct an invariant measure, because the global behavior of solutions for nonlinear evolution equations can be investigated in view of the invariant measure. We have constructed two kinds of invariant measures, that is, the Gibbs measure and the measure proposed by Kuksin. We also have compared those two invariant measures. Furthermore, we have studied the Zakharov equations with additive noises, which is a mathematical model to describe a turbulence of spectrums of electromagnetic waves in the ionosphere. We have proved the global existence in time of solutions for the Cauchy problem of the Zakharov equations with additive noises.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学解析

キーワード：確率非線形分散型方程式 Gibbs測度 Kuksin流の不変測度 等温Falkモデル 加法的ノイズ付きZakharov方程式 電離層における電磁場擾乱 時間大域解の存在

1. 研究開始当初の背景

確率的摂動項を持つ非線形分散型方程式は、ノイズのあるプラズマやグラスファイバー中をソリトン解が通過したときに、どのような変形を受けるかという物理モデルに対応している。従来このような効果は、粘性項や摩擦項を方程式に付加することによって表現され研究されてきたが、このような決定論的モデルでは説明できない現象が観測されるようになり、近年物理学者によって、確率的摂動項を持つ非線形分散型方程式の数値シミュレーションが盛んに行われている。

他方、物理的には自然な設定である確率非線形発展方程式は、偏微分方程式の観点からは、確率項が特異性の強い摂動項として現れるため、取り扱いが極めて困難である。そのため、平滑化作用を持つ放物型方程式を除くと、数学的研究は極めて限定的であった。1990年代に、Bourgain によって開発されたフーリエ制限法によって、非線形分散型方程式は、非常に弱い関数空間で解けるようになった。しかし、フーリエ制限法は、空間変数に関してはかなり広い関数空間を扱えるが、時間変数に関してはある程度の滑らかさ(たとえば、指数 $1/2$ の Hölder 連続性)を必要とする。時空間ホワイトノイズはブラウン運動の無限次元版であるため、フーリエ制限法が必要としている時間変数についての滑らかさを持っていないので、直接適用することは困難である。そのため、フーリエ制限法の改良が必要であったが、その方向の研究は、申請者と de Bouard, Debussche 両氏との共同研究によって開始された。

以上の背景のもとで、確率的摂動を持つシステムの解析、あるいは方程式は決定論的であっても、不変測度を通して確率論的解析を行うことが重要と認識されるようになった。フーリエ制限法の改良は、確率非線形分散型方程式だけでなく、非線形分散型方程式全般への応用が期待される。また、無限次元不変測度を構成する事はそれ自身興味深いだけでなく、不変測度を用いて解の大域的挙動について解析できるため、非線形発展方程式論の観点から重要な研究課題である。

2. 研究の目的

偏微分方程式論の観点からは、従来確率的摂動は特異性が強く、悪い効果を及ぼすものと考えられることが多かった。しかし、確率的效果を考慮することにより、決定論の場合より良い結果が生じることもあることが、近年報告されるようになってきた。このような現象は、ノイズによる安定化(stabilization by noise)あるいはノイズによる正則化(regularization by noise)とよばれる。しかし、どのような場合にノイズが良い効果を与え、どのような場合は悪い効果を及ぼすのかは、具体例が報告されているだけで、その背後にあるメカニズムや原理はほとんど分かって

いないと言って良い。

そこで、本研究課題の目的として、次の二つを選択した。決定論的な方程式系に対し、不変測度を構成することにより確率論的枠組みを導入すると、どのような解析が可能となるか調べる。ノイズ付きの非線形発展方程式を考え、ノイズの効果解にどのような影響を与えるのか解析する。

3. 研究の方法

元々は確率論的效果が導入されていない決定論的非線形発展方程式に対し、不変測度を考えることにより、確率論的效果を含んだ解析を行うことを試みた。具体的には、Gibbs 測度と Kuksin 流の不変測度を構成し比較することを試みた。Gibbs 測度はハミルトン系に対する、物理的に最も自然な不変測度である。しかし、Gibbs 測度の台はハミルトニアンから定まるエネルギー空間より広い空間に乗っており、実際、エネルギー空間は Gibbs 測度で測ると測度ゼロとなる。そのため、Gibbs 測度は物理的に自然な空間であるエネルギー空間に属する解の情報を何も持っていない可能性がある。他方、最近 Kuksin によって提案された、散逸系からハミルトン系への極限操作によって構成される不変測度は、その台がエネルギー空間より滑らかな空間に乗っていることが証明できるため、滑らかな解の情報を含んでいることが期待される。

また、数理モデルでは確率論的摂動が導入されるのは自然であるため、そのような場合に決定論的な手法、特に、非線形分散型方程式で有効であったフーリエ制限法を修正することを試みた。具体的には、シュレディンガー方程式とイオン音波方程式が連立した Zakharov 方程式に対し、加法的ノイズの付加された場合の初期値問題を調べた。

なお、確率微分方程式研究の先進地域であるヨーロッパでの、確率非線形発展方程式の研究動向を知るため、本科研費で以下の外国人研究者を京都大学に招へいし意見交換を行った。

平成 23 年度

1. Maxime Gazeau 氏 (パリ理工科学学校, フランス) 平成 23 年 10 月 16 日~26 日

平成 24 年度

1. Franco Flandoli 氏 (ピサ大学, イタリア) 平成 24 年 5 月 19 日~26 日
2. Anne de Bouard 氏 (パリ理工科学学校, フランス) 平成 24 年 7 月 15 日~22 日

4. 研究成果

形状記憶合金の数理モデル方程式である等温 Falk 方程式に対して 2 種類の不変測度、

すなわち, Gibbs 測度と Kuksin 流の不変測度を構成し比較した. その結果として, Kuksin 流の不変測度の構成には, エネルギー汎関数に対し, ある種の強圧性 (coerciveness) が必要であることが明らかとなった. Gibbs 測度の構成には, 必ずしもエネルギー汎関数の強圧性は必要ないので, 大きな相違点とさえよう. Kuksin 流の不変測度の台は滑らかな関数を含んでいることは分かるが, どの程度大きい空間なのかは未解決であり, 今後の重要な研究課題であろう. さらに, Gibbs 測度と Bourgain の議論を用いて, ほとんどすべての解に対し, Sobolev ノルムの時間増大度に関する評価式を得ることができることが分かった. これは, 不変測度が Gauss 測度であるなら, 方程式によらず成り立つ普遍的な評価式であること, 及び決定論的な議論からは従わないことから, 非線形発展方程式と確率論的議論の関係に重要な示唆を与えている.

また, 空間 1 次元の加法的ノイズが付加された Zakharov 方程式の初期値問題に対し, Colliander, Holmer and Tzirakis による決定論的な Zakharov 方程式に対する議論を確率微分方程式に拡張し, 時間大域解の存在を研究した. Colliander, Holmer and Tzirakis の議論は摂動項の時間に関する滑らかさが必要であり, 白色ノイズはその要請を満たさない. しかし今回は, 時間に関し白色であるが空間に関しては有色であるノイズに対し, 共分散作用素 (covariance operator) の適当な条件の下で, フーリエ制限法が適用できることを示した. 元々, Zakharov 方程式はプラズマに於ける Langmuir 擾乱を記述する方程式であるが, ノイズ付きの Zakharov 方程式は, 電離層に於ける NEIAL (Naturally Enhanced Ion Acoustic Lines) とよばれる現象の数理モデルとして, 近年地球物理学の分野で注目を集めている重要な方程式系である. 電離層を含む熱圏では, 大気分子の平均運動量が非常に大きく, 熱雑音や Cherenkov 効果による雑音が大きいため, 数理モデル方程式はノイズ項を含むのが自然である. 今後この分野は, 確率偏微分方程式の数学的研究に, 格好の話題を提供してくれるものと予想される.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. Yoshio Tsutsumi and Shuji Yoshikawa, Invariant measures for the isothermal Falk model of shape memory alloys, to appear in *Mathematical Sciences and Applications*.

2. Arnaud Debussche and Yoshio Tsutsumi, 1D quantum nonlinear Schrödinger with white noise dispersion, *Journal de*

Mathématiques Pures et Appliquées, 96 (2011), 363-376.

[学会発表](計 2 件)

1. Yoshio Tsutsumi, "Global existence of solutions for 1D Zakharov equations with additive noises", *International Workshop on Differential Equations and its Applications*, 2013年7月26日 - 7月28日, 台湾, 国立成功大学.(招待講演)

2. Yoshio Tsutsumi, "Global L^2 solutions of 1D Zakharov equations with additive noises", 保存則を持つ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究, 2013年6月3日 - 6月5日, 京都大学数理解析研究所, 京都.(招待講演)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等
無し

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堤誉志雄 (京都大学理学研究科・教授)

研究者番号: 10180027

(2) 研究分担者

無し ()

研究者番号:

(3) 連携研究者

無し ()

研究者番号：

(4)研究協力者

Anne de Bouard (パリ理工科学学校, フランス)