

機関番号：32606

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654061

研究課題名(和文)宇宙検閲官仮説を巡る幾何解析

研究課題名(英文)On geometric analysis related to the Cosmic Censorship Conjecture

研究代表者

山田 澄生 (Yamada, Sumio)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：90396416

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：幾何解析における G.Perelmanによるポアンカレ予想の解決 H.Brayによるペンローズ不等式の証明 という2つの全く新しい進展を萌芽的出発点として、ペンローズ不等式とよばれるリーマン幾何学的な文脈を持つ不等式の一般化に成功した。また研究分担者中村はアインシュタイン方程式と密接に関連する非線形双曲型偏微分方程式に関する研究を進めた。研究代表者は、平成24、25年度に国際研究集会を企画、また国外での研究集会等の情報交換の場を確保することで、現在の共同研究者であるGilbert WeinsteinとMarcus Khuriとの研究が大きく進んだことが、本研究課題の主な実績に直結した。

研究成果の概要(英文)：Based on ideas inherent in two major advances in the field of geometric analysis, namely, Perelman's resolution of Ricci flow, and Bray's proof of Riemannian Penrose inequality using conformal deformation of Riemannian metrics, the PI has succeeded in generalizing the Penrose inequality, concerning the solution of the Einstein-Maxwell equation. The Investigator Nakamura has also obtained a set of interesting results in the field of nonlinear hyperbolic partial differential equations, which are closely related to the Einstein equation.

Under the support of the current grant, two international meetings were organized in Japan, and together with attending academic meetings abroad, the investigators Yamada and Nakamura established opportunities for exchanges of ideas, which led to the collaboration with Gilbert Weinstein and Marcus Khuri, which in turn became the major work described above.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：アインシュタイン方程式 発展方程式 極小曲面 リーマン計量

1. 研究開始当初の背景

アインシュタイン方程式は、時空の構造を定める 4 次元ローレンツ計量を解(アインシュタイン計量)としてもつ非線形 2 階偏微分方程式系である。宇宙検閲官仮説とは、アインシュタイン計量に特異点が存在しても、それは事象の地平線とよばれるブラックホールの表面が特異点と観測者の間に必ず存在するため、特異点の存在証拠は我々観測者から検閲されてしまうという予想である。観測者から見える特異点は裸の特異点を形成する。裸の特異点の存在はアインシュタイン方程式に現れる曲率の爆発に起因する我々の存在する世界の因果律の崩壊を意味するため、物理の観点からは宇宙検閲官仮説は信憑性をもつと考えられている。アインシュタイン方程式の時間的大域解の存在、一意性、および安定性に関しては一部の例外を除き、系統立った非線形性の解析は未だ発展途上であるなか、宇宙検閲官仮説と整合する時空の幾何学的構造を特定することに、本研究課題の必然性があった。

2. 研究の目的

本申請では一般相対性理論を定式化するアインシュタイン方程式の大域解(アインシュタイン計量)を構成することを目指した。より具体的には、この 10 年間に導入された幾何解析における 2 つの進展：

1. G. Perelman によるポアンカレ予想の解決を与えたリッチ流の勾配流としての認識
2. H. Bray によるペンローズ不等式の証明を与えた共形変換流の融合を萌芽的出発点として、リーマン計量の時間発展解としてアインシュタイン計量を大域的に構成することを目的とした。

3. 研究の方法

本申請では、アインシュタイン方程式を 3 次元リーマン計量のモジュライ空間内に解を持つ 2 階常微分方程式として捉え、その常微分方程式の定義する計量の変形を Perelman のリッチ流と Bray の共形変換流の双方に内在する微分同相写像によるゲージ変換に着目することで Choquet-Bruhat のアインシュタイン計量の局所存在定理の一般化を図った。

4. 研究成果

アインシュタイン計量を持つ 4 次元時空の構成法としての Choquet-Bruhat によるアインシュタイン計量の局所存在定理は、双曲型方程式系のコーシー問題の可解性を保証するものであった。本挑戦的萌芽研究においては、

この可解性のもとで、コーシー初期条件のモジュライ空間の特徴付けを、空間的無限遠球上に漸近的に定義される複数のハミルトニアン不変量の間で成立する不等式を介して行った。これは、本研究申請の萌芽であるアインシュタイン方程式の解に関するペンローズ不等式を、アインシュタイン・マックスウェル方程式に一般化したものである。重力(引力)のみを扱うアインシュタイン方程式と比較したときに、マックスウェル方程式は、クーロン斥力の存在が特徴的である。引力と斥力の双方を扱うアインシュタイン・マックスウェル方程式は、その複雑性から物理的に興味深い現象があることは以前から指摘されてきており、とくに引力と斥力の釣り合う状況は、素粒子物理学においては超対称性とよばれる重要な概念に対応する。本研究では、引力と斥力の関係を、事象の地平線とよばれるブラックホールのトポロジーを介して、定量的に理解する方法論を、ペンローズ不等式の一般化を介して定式化することができた。とくにブラックホールの表面が極小曲面であることに加えて、摂動のもとでの面積の安定性を組み合わせることにより、時空に存在する総質量と総電荷の間に存在する普遍的な不等式を定式化できたことは、物理的な観点からも興味深いものと言える。さらに不等式が等式になる剛性の状況が、Majumdar-Papapetrou 解という既知の厳密解に対応することは興味深い。これら結果は、すでに論文、として発表されており、また現在 Marcus Khuri と Gilbert Weinstein と共に現在論文を執筆中である。これによってアインシュタイン・マックスウェル方程式のコーシー問題としてのモジュライ空間上で、漸近的に定義されたハミルトニアン不変量を、モジュライ空間上のモース関数として捉えるという全く新しい展開が拓かれた。結果的にこの新しい展開は、本研究の主題であった「宇宙検閲官仮説と整合する時空の幾何学的構造」の理解に、新たな視点の導入に成功したといえる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

Chikako Mese, Sumio Yamada, Local uniformization and free boundary regularity of minimal singular surfaces, *Journal of Geometric Analysis*, 査読有, vol.21, 2011, 743-766.

Sergio Dain, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada, A counterexample to a Penrose inequality conjectured by Gibbons, *Classical and Quantum Gravity*, vol.28, 査読有, 2011, article #85015.

Makoto Nakamura, Remarks on Keel-Smith-Sogge estimates and some applications to nonlinear higher order wave equations, Differential and Integral Equations, vol.24 査読有, 2011, 519-540.

Makoto Nakamura, Small global solutions for nonlinear complex Ginzburg-Landau equations and nonlinear dissipative wave equations in Sobolev spaces, Reviews in Mathematical Physics, vol.23 査読有, 2011, 903-931.

Sergio Dain, Gilbert Weinstein, Marcus Khuri, Sumio Yamada, Lower bounds for the area of black holes in terms of mass, charge and angular momentum, Physical Review D, 査読有, 2013, article#24048.

Sergio Dain, Gilbert Weinstein, Sumio Yamada, On the Riemannian Penrose inequality with charge and the cosmic censorship conjecture, RIMS-Kokyuroku, vol.1862, 査読無, 2013, 63-66.

山田澄生, 一般相対性理論に現れる極小曲面について, RIMS-Kokyuroku, vol.1880, 査読無, 2013, 180-190.

H. Lindblad, M. Nakamura, C.D. Sogge, Remarks on global solutions for nonlinear wave equations under the standard null conditions, Journal of Differential Equations, vol.254, 査読有, 2013, 1396-1436.

Sumio Yamada, Convex bodies in Euclidean and Weil-Petersson geometries, Proceedings of American Mathematical Society, 査読有, vol.142, 2014, 603-616.

Athanase Papadopoulos, Sumio Yamada, The Funk and Hilbert geometries for spaces of constant curvature, Monatshefte Mathematik, 査読有, vol.172, 2013, 97-120.

T. Iwabuchi, M. Nakamura, Global and almost global solutions for some nonlinear parabolic equations in Besov spaces and Triebel-Lizorkin spaces, Adv. Differential Equations, vol.18, 査読有, 2013, 687-736.

Makoto Nakamura, Remarks on a weighted energy estimate and its application to nonlinear wave equations in one space dimension, Journal of Differential Equations, vol.256, 査読有, 2014, 389-4-6.

Makoto Nakamura, The Cauchy problem for semi-linear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime,

Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.410, 査読有, 2014, 445-454.

[学会発表](計 8件)

山田澄生, Riemannian geometric aspects of Penrose-type inequalities, The 21st workshop on General Relativity and Gravitation in Japan (JGRG21), 2011.9.26, 東北大学.

山田澄生, On variational formulations of free boundaries, The 1st Sino-Japan Conference of Young Mathematicians, 2011.12.8, 南海大学中国.

Sumio Yamada, Convex Geometry on constant curvature spaces, Tsinghua-Sanya International Mathematics Forum, 2013.1.8, 三亞、中国.

Sumio Yamada, On variational characterization of exact solutions in general relativity, The 6th Pacific IRM Conference on Mathematics 2013, 2013/7/1, 札幌コンベンションセンター.

Sumio Yamada, Convexity associated with the Weil-Petersson geometry, The XXII Nevanlinna Colloquium, 2013/8/6, Helsinki University フィンランド.

Sumio Yamada, On Penrose-type inequality in general relativity, The Taiwan International Conference on Geometry, 2013/12/17, 台湾国立大学、台湾.

Makoto Nakamura, On small solutions for nonlinear Klein-Gordon equations in exterior domains, 集中講義, 北京大学, 中国.

Makoto Nakamura, Energy estimates for nonlinear Klein-Gordon equations in de Sitter spacetime, 2013/8/5, Pedagogical University, Krakow, Poland.

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:

発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

該当無し

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 澄生 (YAMADA, Sumio)

研究者番号：90396416

(2) 研究分担者

中村 誠 (NAKAMURA, Makoto)

研究者番号：70312634

(3) 連携研究者

()

研究者番号：