

## 科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 5月 14日現在

機関番号：32689

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2012

課題番号：23654064

研究課題名（和文）非線型放物型方程式の解の爆発理論における非対称・非等方性の研究

研究課題名（英文）Study on asymmetry and anisotropy in blow-up theory for nonlinear parabolic equations

研究代表者

小澤 徹 (OZAWA TOHRU)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：70204196

研究成果の概要（和文）：藤田型の非線型熱伝導方程式の初期値問題の正值解の爆発現象について研究した。解が爆発する事は約半世紀前の藤田宏の先駆的研究以来良く知られており、最近では爆発解の形状などの空間的挙動についても精密な研究が行われている。本研究では、爆発時刻が初期データの球面平均を用いて特徴付けられる事を示した。Lee と Ni の結果 (Trans.AMS, 1992) および Gui と Wang の結果 (JDE, 1995) で課されていた一様性と等方性の仮定を外し、爆発現象が常微分方程式的構造に支配されてる様子を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Blow-up phenomenon of positive solutions to the Cauchy problem for nonlinear heat equation of Fujita type is studied. The blow-up phenomenon was first observed and proved by Hiroshi Fujita about half a century ago. There is a large literature on the subject, especially on the formation of blow-up solutions in configuration space up to the blow-up time. We have proved that the blow-up time is characterized by means of the spherical average of the Cauchy data. We removed the assumptions of uniformity and isotropy on the Cauchy data, which were necessary in the former works by Lee and Ni (Trans. Ams, 1992) and Gui and Wang (JDE 1995). We described how the ODE structure controls the blow-up phenomenon.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論

## 1. 研究開始当初の背景

藤田型方程式の解が爆発する事自体については、約50年前の藤田宏の先駆的研究以来、良く知られており、Friedman, Kohn, Weissler, 儀我、柳田、溝口らの大きな寄与によって、爆発解の形状など空間的振無いについては精密な解析が進んでいる。一方、その爆発時刻が初期条件にどの様に依存するのかと云う問題については、LeeとNiの結果 (Trans. AMS, 1992) とGuiとWangの結果 (JDE 1995) のみが知られているところであるが、その仮定として、

初期条件の空間遠方での挙動に極めて強い条件を課したものであり、充分解明されているとは言い難かった。

## 2. 研究の目的

藤田型の非線型熱方程式をはじめとする非線型放物型方程式の爆発理論において、解や初期値に関する動径対称性や無限遠点における一様な減衰度などの、対称性・等方性の果たす役割を、対称性・等方性を仮定しない理論を構築することにより、明らかにするこ

とが本研究の目的である。

### 3. 研究の方法

藤田型の非線形熱方程式の爆発理論を、その根本まで振り返って再検討を詳細に行う。汎関数の満たす常微分不等式を重みつき  $L^2$  空間の理論から捉え直す。この枠組をスペクトル解析の立場から記述する。動径対称性固有の議論を球面調和展開を通じて一般化する。漸近解析的手法を用いて、爆発時刻の評価をデータを用いて表現する。

### 4. 研究成果

初期関数の空間遠方での挙動について、単位球面上に射影した下極限関数に着目し、その球面平均が爆発時刻の上からの評価を具体的に与える事に成功した。より具体的には、 $p$  冪乗で表される非線形項の場合、球面平均の  $(1-p)$  乗で爆発時刻は上から評価される事を証明した。先行結果に課されていた仮定の一様性・等方性を外し、爆発現象が常微分方程式的構造に支配されている様子を明らかにした。更には解の爆発方向を単位球面上で特定する方法論を構築し、初期データとの関連を明らかにした。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

1.  
Y. Cho, G. Hwang, T. Ozawa  
Global well-posedness of critical nonlinear Schrödinger equations below  $L^2$   
Discrete and Continuous Dynamical Systems A, 33 (2013), 1389-1405.  
DOI: 10.3934/dcds.2013.33.1389  
査読有

2.  
Y. Yamauchi  
Life span of positive solutions for the Cauchy problem for the parabolic equations  
Int. J. Differ. Equ. 2012(2012) 16pages  
DOI: 10.1155/2012/417261  
査読有

3.  
T. Ozawa, Y. Yamauchi  
Life span of positive solutions for a semilinear heat equation with general non-decaying initial data  
J. Math. Anal. Appl., 379 (2011), 518-523.  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.01.050  
査読有

4.  
Y. Yamauchi  
Life span of solutions for a semilinear heat equation with initial data having positive limit inferior at infinity.  
Nonlinear Anal. 74 (2011) 5008-5014.  
DOI: 10.1016/j.na.2011.04.064  
査読有

[学会発表] (計 10 件)

1.  
Yusuke Yamauchi  
Life span of positive solutions for the Cauchy problem for the parabolic equations  
名古屋微分方程式研究集会 (招待講演)  
名古屋大学  
2013年03月13日

2.  
Tohru Ozawa Scienceweb GCOE  
Sharp Morawetz estimates  
The 5th GCOE International Symposium  
"Weaving Science Web beyond Particle Matter Hierarchy" (招待講演)  
Tohoku University  
2013年03月04日

3.  
Yusuke Yamauchi  
Life span of positive solutions for the Cauchy problem for the parabolic equations  
The 14th Northeastern Symposium on Mathematical Analysis (招待講演)  
東北大学  
2013年02月18日

4.  
Yusuke Yamauchi  
Life span of positive solutions for the  
Cauchy problem for the parabolic  
equations  
2012 年度日本数学会秋季総合分科会  
九州大学  
2012 年 09 月 20 日

5.  
Yusuke Yamauchi  
Life span of positive solutions for a  
semilinear heat equation with nondecaying  
initial data  
The 9th AIMS Conference on Dynamical  
Systems, Differential Equations and  
Applications (招待講演)  
Hyatt Regency Grand Cypress, Orlando,  
Florida, USA  
2012 年 07 月 03 日

6.  
Tohru Ozawa  
Klein-Gordon equation in two space-time  
dimensions  
9th International Conference on Harmonic  
Analysis and Partial Differential Equations  
A sharp bilinear estimate for the  
El Escorial (Madrid) (招待講演)  
2012 年 06 月 11 日

7.  
Yusuke Yamauchi  
Life span of positive solutions for a  
semilinear heat equation with nondecaying  
initial data  
第 4 回日独流体数学国際研究集会 (招待講演)  
早稲田大学  
2011 年 12 月 1 日

8.  
Tohru Ozawa  
Finite charge solutions to cubic Schrödinger  
equations with a nonlocal nonlinearity in  
one space dimension  
International Conference on Fluid and Gas  
Dynamics (招待講演)  
浙江師範大学  
2011 年 9 月 23 日

9.  
Yusuke Yamauchi  
Life span of positive solutions for a  
semilinear heat equation with nondecaying  
initial data  
One Forum, Two Cities: Aspect of nonlinear  
PDEs (招待講演)  
National Taiwan University  
2011 年 8 月 30 日

10.  
山内雄介  
無限遠方にて減衰しない初期値に対する熱  
方程式の解の爆発時刻に関する指 向性を持  
つ評価  
2011 年度日本数学会秋季総合分科会  
(招待講演)  
2011 年 9 月 30 日 信州大学

[図書] (計 2 件)

1.  
T. Ozawa and M. Sugimoto,  
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial  
Differential Equations”,  
RIMS Kokyuroku Bessatsu B33,  
2012, 121pp.

2.  
T. Ozawa and M. Sugimoto,  
“Harmonic Analysis and Nonlinear Partial  
Differential Equations”,  
RIMS Kokyuroku Bessatsu B26,  
2011, 175pp.

6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
小澤 徹 (OZAWA TOHRU)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号 : 70204196

(2) 研究分担者  
山内 雄介 (YAMAUCHI YUSUKE)  
早稲田大学・重点領域研究機構・  
次席研究員  
研究者番号 : 00451435

(3)連携研究者

前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)  
神戸大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：70507954

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：20188288