科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2013
課題番号：２３６５４０７９

研究課題名（和文）剛性と変形という観点からの弦理論研究

研究課題名（英文）Study of String Theories from the viewpoint of rigidity

研究代表者
加藤　晃史（Kato, Akishi）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：１０２１１８４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円、（間接経費）　840,000円

研究成果の概要（和文）：双対性の解明は弦理論の最重要な課題の一つであり、安定状態の数え上げの母関数を知ることが極めて重要である。最近、私は寺嶋郁二氏(東京工業大学)との共同研究で、クラスター代数の exchange graph 上のループを表す箙変異の列（quiver mutation loop）に対し、分配 q 級数と呼ばれる母関数を定義した。これはペンタゴン(五角形)関係式や共形場理論のフェルミ型指標公式との関係、保型性などの著しい性質を持つ。分配 q 級数は組合せ論的データのみから定義され、系の詳細には依らないので、双対性の背後にある共通の性質や量子化の機構を追究する枠組みとして役立つと期待される。

研究成果の概要（英文）：One of the central issues of string theories is to understand "dualities". It is of crucial importance to study the generating functions of the stable states. In a joint work with Yuji Terashima (Tokyo Institute of Technology), we defined partition q-series for a quiver mutation loop (a loop in a quiver exchange graph in cluster algebra terminology). We showed that they enjoy various remarkable properties such as pentagon identities, relation with fermionic character formulas of certain conformal field theories, and modular properties. The partition q-series are defined solely in terms of combinatorial data and are independent of the details of the system under study. It is expected that the partition q-series proves to be a unifying framework for shedding new lights on dualities and quantization.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学

キーワード：素粒子(理論)　数理物理学　分配関数　不変量　変異　箙　弦理論　三角圏

1. 研究開始当初の背景

双対性とは、異なる自由度・作用汎関数・対称性・相互作用等を持った物理系が量子論としては全く等価になることを指し、その解明は弦理論の最も重要な課題の一つである。双対性変換は強結合と弱結合、ゲージ場のような素励起とモノポールのような集団励起を入れ替えるような対称性であり、それにより我々の物理系の記述を根本から変えることになる。数学的にも、Langlands 双対性のような深い理論との類似が指摘されている。

弦理論の双対性は、Donaldson-Thomas 不変量や Gromov-Witten 不変量、3 次元双曲多様体の Chern-Simons 不変量など、数学のそれぞれの分野で独立に定義される不変量の間に、不思議な関係を予言する。それらの関係性を個別に調べることは行われていても、全体を統一的に調べることは現状では大変困難である。

2. 研究の目的

研究代表者はこれまで弦理論の数理物理的側面を研究しているが、弦理論の特徴の 1 つとして、その豊かな双対性が幾何学と結びついて現れていることに注目した。つまり、物理量の特異性は、弦理論が運動する空間の幾何学的な特異性として説明されるような事例が多く発見されてきた。

これらの幾何学的な状況は、双曲幾何のような剛性が支配する世界と、リーマン面のように変形可能な複素構造が存在する境界部で先鋭化される。そこで、研究の目的としては上記の幾何学的描像をさらに進めて、こうした「剛」と「柔」の関わりという萌芽的ではあるが汎用性の高い視点に立ち、双対性変換全体の構造を記述するような枠組みを構築することを研究の目的とした。

3. 研究の方法

Seiberg-Witten による 4 次元超対称ゲージ理論の厳密解は、2 次元の壁を越えた始めての場の量子論の厳密解であり、その後の弦双対性発見のきっかけを作った。特に革命的だったのは、楕円曲線の族によって低エネルギー有効理論を書き下し、場の理論の特異性を幾何の特異性に読み替え、電磁双対性をモノドロミーとして捉えるという視点であった。Thurston の幾何構造の理論もまた、それまでの 3 次元幾何学の研究を一変させた。特に重要な影響をもたらしたのは Perelman によって証明され Poincare 予想の解決に繋がった幾何化予想である。これは「3 次元位相多様体の形は自由に変形出来るように見えるが、実は固有の形を持った部品に一意的に分解される」ことを意味し、3 次元多様体もまた「剛性」で支配されていることの帰結である。本研究ではまず、BPS 格子やゲージ群という剛性構造と、真空のモジュライという変形空間の対比と統合というパラダイムから出発した。そのために、どのような類似が成り立つのかの辞書づくりを進めた。

近年、弦理論やゲージ理論の状態の空間には三角圏の構造が入ることが明らかにされ、双対性の定式化やその理解のために、分配関数＝安定状態の数え上げの母関数を知ることが極めて重要になってきている。

「柔」構造は定義から変形可能であるが、変形全体を表す空間はモジュライ空間と呼ばれる。その座標は場の理論の結合定数や、複素構造の周期といった幾何学的意味を持ち、モジュライ空間を理解することは双対性を理解することと直結している。しかし多くの場合、モジュライ空間は特異点を持った非常に複雑なトポロジーを持つ図形であり、それを調べるのは簡単ではない。

近年になり、モジュライ理論の座標系の記述に起源を持つクラスター代数の理論が Fomin-Zelevinski らによって整備された。これは圏論の基本構造である「対象」と「射」を箙 (quiver) という有向グラフとして抽出することにより、さまざまな圏の構造を、その細部に立ち入らずに議論することを可能とする。

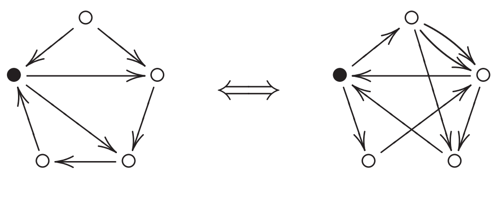

図 1: 箙とその変異の例

特に「ミューテーション (mutation)」という概念が、安定性条件の変化により引き起こされる壁超え現象 (wall-crossing phenomena) とともに重要性を

増してきた。双対性変換を、ミューテションの反復として記述することの重要性が明らかになった。

弦理論の双対性は、様々な不変量の間の関係を予言するが、これらに「共通の性質」を議論するためには箙 (quiver) とその変異 (mutation) という枠組みでが双対性研究の手がかりを与えてくれるものと確信するに至った。

4. 研究成果

弦理論やゲージ理論の状態の空間には三角圏の構造が入ることが明らかにされ、双対性の定式化やその理解のために、分配関数＝安定状態の数え上げの母関数を知ることが極めて重要になってきている。

弦理論の双対性は、Donaldson-Thomas 不変量や Gromov-Witten 不変量、3 次元双曲多様体の Chern-Simons 不変量など、全く異なる分野・理論でそれぞれ定義される不変量の間に不思議な関係を予言する。

これらの数学的・数理物理的対象に共通する構造として、箙 (quiver) とよばれる有向グラフと、その変異 (mutation) という組合せ論的データの持つ重要性が明らかになった。これらは、モジュライ理論における安定性条件を動かした時に生じる壁超え (wall crossing) と呼ばれる現象や、3 次元多様体においては理想単体の貼り合わせを記述するのに利用できる。

従って、双対性の理解のためには、個々の分野の構成法や理論の詳細を思い切り捨象し、「共通の性質」を議論するための枠組みを打ち立てねばならない。そのためには箙 (quiver) とその変異 (mutation) 自体が持つ性質を分析することが極めて重要である。

最近、私は寺嶋郁二氏 (東京工業大学) との共同研究において、与えられた箙変異の列 γ (quiver mutation loop = クラスター代数の exchange graph 上のループに相当) に対し、分配 q 級数 $Z(\gamma)$ と呼ばれる母関数を定義した。

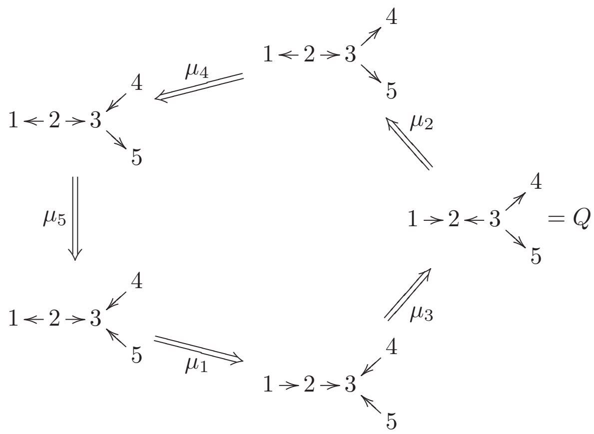

図 2: quiver mutation loop の例

その定義は統計力学の格子模型の分配関数のものに似ており、箙の頂点に与えられた変数で定まる局所的な重みの積を、全ての変数を動かして多重和をとったものとして定義される。ただし、今の場合、箙が表すものは非常に抽象的だが汎用性が広い。それを表現するのにい最も適した三角圏の言葉を用いるならば、各頂点が三角圏のある t 構造に対応するハート (アーベル圏) の単純対象を表し、各頂点に与えられた変数はそれらにより定まる Grothendieck 群の座標（次元ベクトル）を表す。物理的に言えば、(ある安定性条件における) BPS 状態と、それらで表される電荷や磁荷に大体相当するものである。

我々は、分配 q 級数 $Z(\gamma)$ が以下のような著しい性質を持つことを明らかにした。

(1) $Z(\gamma)$ は箙変異の列 γ の反転操作や巡回シフトのもとで不変であり、圏論的なモノドロミーの不変量と考えられる。

(2) 箙変異の列 γ の変形に対し、量子ダイログ関係式に現れるのと同様なペンタゴン (5 角形) 関係式を満たす。すなわち、分配級数は、exchange quiver にペンタゴンを貼り付けて得られる空間（この空間は可縮であるという予想がある）のホモトピー類にしか寄らない。

(3) ADE 型ディンキン図形やそのペアから自然に定義される分配 q 級数は、アフィン・リー環に附随する coset 型共形場理論に現れるフェルミ型指標公式に一致し、適当な q ベキ補正のもとで $Z(\gamma)$ は保型形式となる。

分配 q 級数は組合せ論的データのみから定義され、箙が表す数学的対象の詳細には依らないので、双対性の背後にある共通の性質や量子化の機構を追究する上で役立つと期待される。

プレプリント発表後、直ちに q 級数の専門家である Ole Warnaar 氏から内容について関心を持つとともに拡張の可能性について問い合わせがあり、電子メールにて議論を行った。また、国場敦夫氏（東京大学総合文化)、鈴木淳史氏（静岡大学理学部）といったクラスター代数の専門家とも研究連絡を行った。また、2013 年 2 月の長尾健太郎氏追悼研究集会では、招待講演者として共同研究者の寺嶋郁二氏が我々の共同研究の成果について講演を行った。

現在は、我々の分配級数と、量子クラスター変換に現れる量子ダイログ級数の積との関係や、Calabi-Yau 圏に附随する Donaldson-Thomas 不変量の関係について研究中である。また、３次元多様体の不変量としての解釈も期待でき、現在分析を行っているところである。

5. 主な発表論文等

［雑誌論文］（計３件）

① Akishi Kato and Yuji Terashima : “Quiver mutation loops and partition q-series”
http://arxiv.org/abs/1403.6569
雑誌 “Communications in Mathematical Physics” (Springer Verlag) に掲載が決定済。査読あり

② 加藤晃史 “数学と次元 − 次元の多様性と無次元化する物理学 − ” ・数理科学・51 巻 5 号・2013・54-55, 査読なし

③ 加藤晃史 “行列と微分方程式”・数理科学・49 巻 3 号・2011・45-51, 査読なし

［学会発表］（計５件）

① 加藤晃史・寺嶋郁二 「quiver mutation, partition q-series and quantum dilgarithms」日本数学会・2014 年度秋季総合分科会, 広島大学, 2014 年 9 月 (講演申し込み中).

② 寺嶋郁二 (東京工業大学) (joint work with 加藤晃史) 「3 次元幾何とミューテーション」Geometry, Physics and Representation Theory, 名古屋大学, 2014 年 2 月 21 日.

③ 加藤晃史「経路積分入門 : トポロジーへの応用を中心として」第 8 回 福岡・札幌 幾何学セミナー, 九州大学, 2014 年 2 月 19 日・20 日.

④ 加藤晃史「場の量子論の分配関数とゼータ関数 (1), (2)」Geometric zeta functions and related topics, 佐賀大学, 2013 年 10 月 31 日.

⑤ 加藤晃史「基本群の表現と位相的場の理論 (1), (2)」裏磐梯セミナー, 裏磐梯高原ホテル, 2013 年 7 月 25 日・26 日.

［その他」(1 件)

① 加藤晃史「力学の変遷− 古典・量子・弦− 」数理科学研究科 2011 年度公開講座「数理科学の広がり」2011 年 11 月 19 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者
加藤 晃史 (KATO Akishi)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：１０２１１８４８