

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2012

課題番号：23656068

研究課題名（和文） 気体分子運動論における不連続と特異性についての基礎研究

研究課題名（英文） Study on the discontinuity and singularity in the kinetic theory of gases

研究代表者

高田 滋 (TAKATA SHIGERU)

京都大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：60271011

研究成果の概要（和文）：

気体分子運動論では、気体を分子の集団と考え、分子の速度分布（位置と速度の分布）を追跡して、その適当な平均量から気体の運動を理解する。本研究では、平らな物体面の付近で、この平均量の位置に関する変化率が限りなく大きくなる「特異性（発散）」が現れること、発散の程度は対数的であることを明らかにし、分子の速度分布に物体面上で不連続な跳びがあることがその原因であることを突き止めた。

研究成果の概要（英文）：

In the kinetic theory, the gas behavior is investigated through the velocity distribution of innumerable gas molecules. In the present study, we have clarified that the macroscopic quantities, such as density, temperature, flow velocity, varies indefinitely steeply near the surface of planar body in its normal direction; to be more precisely, the variation rate is logarithmic. We have also identified that the source of this divergence is the discontinuous jump of velocity distribution of gas molecules on the surface of planar body.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：希薄気体力学，非平衡気体力学，流体力学

科研費の分科・細目：応用物理学・基礎工学，基礎工学

キーワード：ボルツマン方程式，対数特異性，速度分布関数，気体分子運動論，希薄気体

1. 研究開始当初の背景

気体分子運動論とは、気体を連続体ではなく分子という微視粒子の集団と考え、気体の振舞いを分子の速度分布関数（位置と速度の相空間における分子の数密度）を通して理解しようとするものである。その数理モデルがボルツマン方程式である。

速度分布関数あるいはそれによって定義される流体力学的な物理量には種々の局面に応じた特異な振舞いが現れうる。代表者はこれまで個別に議論されてきた種々の特異性を速度分布関数（あるいはその導関数）の不連続という視点からの統一的な解釈を確立しようと目論んでいる。

本研究では、このもくろみの一環として、

流体力学的な物理量には境界近傍で対数的な勾配発散という特異な現象が起こること、そしてそれに速度分布関数レベルでの直接的な物理解釈をあたえることを目指した。この境界近傍の対数的特異性は、すでに曾根らによって70年代に緩和模型(BGK方程式)を用いて、軽度に希薄な気体にみられる境界層に対して指摘されている。しかし、先駆的なこの結果は緩和模型に固有の性質(流体力学的物理量に対する積分方程式系に問題を帰着できる)を利用したもので、本来のボルツマン方程式への拡張性をもたない。最近の先行研究として、LilleyとSaderによる既存の数値データのフィッティングを使った大まかな議論はあったが、対数特異性という本質には全く肉薄できていなかった。いずれにせよ、代表者が狙う「速度分布関数の不連続との対応」という本質的な物理像はつかまっていなかった。

一方で、代表者は舟金とともに高希薄度気体のチャンネル流の解析を行っていた。この流れでは(無次元)流量が気体の希薄度について対数増大する別種の困難があるが、その原因・構造を速度分布関数レベルで突き止め、この困難を克服する方法論を確立した。この方法論が境界近傍での対数的な特異性の構造解明にも応用できることに気づき、これが本研究を開始する上での基礎になった。

2. 研究の目的

速度分布関数あるいはそれによって定義される流体力学的な物理量には種々の局面に応じた特異な振舞いが現れうる。代表者はこれまで個別に議論されてきた種々の特異性を速度分布関数(あるいはその導関数)の不連続という視点からの統一的な解釈を確立しようと目論んでいる。

本研究では、このもくろみの一環として、流体力学的な物理量には境界近傍で対数的な勾配発散という特異な現象が起こること、そしてそれに速度分布関数レベルでの直接的な物理解釈を与えることを目的とした。

3. 研究の方法

研究は数値解析を先行させて予備解析の妥当性を確かめながら、数学解析を並行して行った。

数値解析では、予備的な解析によって現象の構造を大づかみに予想し、その予想を検証する数値解法の開発を行った。ボルツマン方程式の数値解法としては、直接シミュレーション・モンテカルロ法に代表される確率解法が主流であるが、(人為的な)統計ノイズが

大きいこのような確率解法では対数的な弱い発散特異性を吟味することはまず不可能である。また、決定論的な直接差分解法にも難点があることが経験上わかっていた。本研究では、従来の数値解法とは趣きを変え、ボルツマン方程式を速度分布関数に対する積分方程式に変換して、これを数値的に取り扱うことにした。この積分方程式は予備解析にも利用しており、そこでの構造分析の結果を数値的に検証するのに適している。とくに次項4(1)④の検証では非常に効果的な方法であることが確かめられた。

数学解析では、予備解析および先行させた数値解析の結果をもとに、数学的証明に対するI-Kun Chen博士(研究協力者)のアイデアを基礎にして証明を構築した。当初は部分的に計算機補助証明(Computer Aided Proof)を部分的に用いる方針を立てていたが、その部分を厳密な計算におきかえられることに代表者が気づき、すべての証明過程を通常の数学的手続きで完成させることができた。

4. 研究成果

(1) 数値解析による成果

研究目的を達成するために、具体的問題設定として2平板間の希薄気体を考えた。予備的解析による考察の結果を反映した新しい数値解法を舟金とともにまず開発し、綿密な数値解析を実行した。この数値解析によって得られた新しい知見はおもに以下のとおりである：

① 平面状の境界近傍では、巨視的物理量の勾配は、境界からの距離に対して対数的に振舞う。このことは、巨視的物理量の勾配が境界上で対数発散することを意味している。

② 速度分布関数の重みつき平均量の示す①の特異性に由来して、分子速度の境界に垂直な成分に対して、速度分布関数は境界上で同様の特異性を示す。

③ 速度分布関数は一般に境界上で不連続であることが知られている。巨視的物理量の対数的な特異性の強度は、この不連続の大きさと定量的に関係づけられる。より詳細には、衝突頻度を介してこの不連続が減衰することが上記の特異性の構造である。

④ 速度分布関数の不連続によって、その平均量が特異な振舞いを示す結果、その影響によって境界上で速度分布関数自体に分子速度の法線成分に関する類似の対数的な振舞

いが現れる。

①～④の描像は気体の希薄の度合いとは無関係に成り立つ。この成果は雑誌論文として Journal of Fluid Mechanics 誌に発表、掲載されている。代表者はこの成果を題材にした招待講演を国内外で4件行っている。

なお、派生研究として、2平板間ではなく円管内の高希薄度気体の基本流の振舞いも調べた。その成果は Fluid Dynamics Research 誌に発表、掲載されている。

(2) 数学解析による成果

数値解析と並行して、T.-P. Liu, I-K. Chen, 舟金とともに数学解析を行った。解析は数値解析と同じ2平板間の希薄気体について行ったが、解析の見通しが比較的立ちやすい高希薄度気体に対象を限定した。その結果、とくに上記④について、厳密な数学的証明を与えることに成功した。この成果は雑誌論文として Communications in Mathematical Physics 誌に2012年12月投稿した。

(3) 成果の位置付けとインパクト

境界で速度や温度の勾配が発散するということは、通常の流体力学では、境界に無限大の力や熱が伝わることを意味し、受け入れられないため、その可能性ははじめから議論の土俵に乗らない。しかし、気体分子運動論によれば、速度や温度の勾配と力や熱の伝達には直接の関係はなく、実際、勾配が発散しても伝達される力や熱は有限にとどまり支障はない。本研究で、勾配発散が対数的に生じることが確立されたことの物理的な意義は大きい。他にあげられる意義、インパクトは概ね以下のとおりである：

① 解の振舞いの特異性を数値解析によって示す方法論を確立した。確立した方法は、数値解の離散解像度に対する収束性が離散格子点間の補間曲線の選択にどう依存するかを吟味するという意味ではオーソドックスな手法である。しかし補間曲線の選択は単に多項式近似の枠内で行うのではなく、予備解析（予備的な数学解析）で得られた知見を反映して行う（いわば特異関数を数値的に取り除く）ものである。このように、数値解析でよくみられる収束性の吟味と数学解析の成果を巧みに連携することで、特異性の立証を数値的に可能にした。この方法論は、次項5〔学会発表〕(1)(4)で非常に注目された。〔雑誌論文〕(1)でも査読者からとくに高く評価されたポイントである。

② 2013年4月に台湾中央研究院数学研究所

で開催された Workshop on Boundary Phenomena for Evolutionary Partial Differential Equations は、とくに境界や界面でみられる流体や弾性体の振舞いに焦点を当てた会議である。代表者はボルツマン方程式に関して境界近傍での解の特異性の研究を先導する研究者として同研究集会に招かれた。

③ 研究協力者の I-Kun Chen 博士は、ごく最近、希薄度の大小によらず、流体力学的な物理量の勾配が平面境界近傍で対数発散することを、数学的に厳密に証明した。この証明は本研究の数値解析で得られた知見をもとに一定の数学的仮定の下で行われている。証明には随所に本研究のアイデアや成果（特異性が発現する機構など）が生かされている。このように、ボルツマン方程式を研究する応用数学者にもすでに波及効果を及ぼしている。

(4) 今後の展望

先に述べた円管内の高希薄度気体に対する数値解析は、今後の研究展開へ向けた一つの布石である。この解析で得られた情報は、境界近傍での特異現象の理論を幾何学的形状を考慮した場合に一般化するための足掛かりになる。この一般化は非常に重要なステップなので、この方向に研究を展開していきたい。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計3件）

- (1) Shigeru Takata, Hitoshi Funagane, Singular behaviour of a rarefied gas on a planar boundary, Journal of Fluid Mechanics (査読有) Vol. 717 (2013) pp.30-47
DOI: 10.1017/jfm.2012.559
- (2) Hitoshi Funagane, Shigeru Takata, Hagen-Poiseuille and thermal transpiration flow of a highly rarefied gas through a circular pipe, Fluid Dynamics Research (査読有) Vol. 44 (2012) 55506
DOI:10.1088/0169-5983/44/5/055506

〔学会発表〕（計7件）

- (1) Shigeru Takata, On a gradient singularity of flow of a rarefied gas over a planar boundary, Workshop on Boundary Phenomena for

Evolutionary Partial Differential Equations,
2013年4月19日-20日, Taipei (Taiwan).

- (2) Shigeru Takata, Singular behavior of a rarefied gas on a planar boundary, Workshop on Kinetic Theory and Gas Dynamics, 2012年7月17日, Stanford (USA).
- (3) Shigeru Takata, Singular behavior of a rarefied gas on a planar boundary, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2012年7月4日-6日, 京都.
- (4) Shigeru Takata, Singular behavior of a rarefied gas on a planar boundary, 14th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, and Applications, 2012年6月25日-29日, Padova (Italy).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高田 滋 (TAKATA SHIGERU)
京都大学・工学研究科・教授
研究者番号: 60271011

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

舟金 仁志 (FUNAGANE HITOSHI)
新日鐵住金(株)・技術開発本部

TAI-PING LIU
Department of Mathematics, Stanford
University (USA), Professor Emeritus
Institute of Mathematics, Academia
Sinica (Taiwan), Professor

I-KUN CHEN
Department of Applied Mathematics,
National Chiao Tung University (Taiwan),
Assistant Professor