

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：37111

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23656074

研究課題名(和文)半正値四次形式の比の和で表される関数の最適化とその幾何学

研究課題名(英文)The optimization and the geometry of the sum of ratios of homogeneous quartic forms

研究代表者

藤木 淳(FUJIKI, Jun)

福岡大学・理学部・准教授

研究者番号：10357907

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円、(間接経費) 870,000円

研究成果の概要(和文)：半正値四次形式の比の和で表される関数の最適化とその幾何学を明らかにするための研究を行った。この問題は非常に難解だったために期間内に解決することはできなかったが、この問題を解決するためには、半正値四次形式の幾何学について知ることが重要であり、そのためにはグレブナー基底の幾何学を理解することが重要ではないかという結論に至った。

研究成果の概要(英文)：We investigate the optimization of the sum of the ratios of semi-positive definite quartic forms and its geometry. But unfortunately, the optimization and geometry is difficult for us to make it clear, and we can not solved it during the given period. However, we conclude that to understanding the groebner basis is the most important to elucidate the optimization and geometry, especially, to understand the semi-positive definet quartic forms, which should be investigated before considering the ratios of semi-positive definite quartic forms.

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎

キーワード：四次形式 多項式最適化 グレブナ基底

## 1. 研究開始当初の背景

古典的な多変量解析手法の多くは半正値 2 次形式関数などの凸関数の最適化であり、逆行列操作や固有値を求めることによって大域的最適解が求められることができる。

サポートベクトルマシンなど近年開発された手法も凸二次計画問題などの凸問題に限定して最適化を行なうことによって大域的最適解への収束を保証している。

しかし入力空間の計量に基づく幾何学的あてはめ、直線度に基づく画像の歪み補正や尖度に基づく独立成分分析のようにモデル化の必然性から凸とは限らない多項式関数の最適化が必要となることがある。

一般に半定値多項式関数の最適化において最急降下法などの勾配法を用いると局所最適解に収束して大域的最適解が求められないことが多い。そのため半定値計画緩和による多項式最適化が提案された。

しかし多項式最適化を半定値計画緩和問題に書き換えた際の計算コストは高く、また複数の大域的最適解が存在する場合には緩和問題による解が大域的最適解となるかの判定ができないという問題があるため、これらを解決して大域的最適解を完全に保証する多項式関数の最適化手法の構築が必要であった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は大域的最適解を完全に保証する形で凸関数とは限らない半正値同次型 4 次形式の比の和で表される関数の最適化を実現することである。そのためにまず半正値同次型 4 次形式及びこれに対応する同次型 4 次曲線・曲面の極値問題について考察する。

この際、既に行なわれている 4 次曲線・曲面の位相的分類では最適化には不十分であるため、凹凸に基づいた形状分類を行なうことによって同次型 4 次曲線・曲面の極値問題を解決することによって考えるべき大域的最適解の保証への足掛かりとする。

またこれと同時に、計算コストが高く定式化が複雑ではあるが多くの場合に大域的最適解を与える半定値計画緩和による多項式最適化の幾何学を明らかにすることによって提案手法が大域的最適解を完全に保証することも明らかにする

## 3. 研究の方法

本研究を遂行するために、まず 4 次曲線や曲面の凹凸による分類を中心的に行ない、またこれと同様に半定値計画緩和の幾何学を中心的に行なうことによって半正値 4 次形式関数の大域的最適解を求める手法を構築することが必要である。

まず 4 次曲線・曲面の凹凸による分類につ

いては、その歴史は古く、150 年程前に既に行なわれており、その後、正定値性が重要な意味をもつ制御の分野において研究されてきた。しかし、同次型正値 4 次形式関数の極値を具体的に求めるという最適化問題の大域的最適性はあまり研究されてこなかった。

そこで可視化が可能である 2 変数同次型 4 次曲線の全ての極大値・極小値を、また 3 変数同次型 4 次曲面の凹凸による分類および全ての極大値・極小値を求める手法について研究し、その大域的最適解を求める手法を構築することが必要である。

そしてその後、4 変数以上の大域的最適解を求める手法を構築するという流れで研究を進めて行くことになる。

その一方で半定値計画緩和の幾何学については、まずレイリー商の和で表される関数の最適化のための半定値計画緩和の幾何学についてまず取り組むことが重要である。

一般にレイリー商で表現される関数は単峰であるが、その和で表現される評価関数は単峰とは限らないため一般に局所最適解に収束する。そのため勾配法による局所解で代用をするなど、焼き鈍し法によって確率的に大域的最適解を発見するような手法を用いることが多かった。

しかし半定値緩和による多項式最適化を行なうと計算コストは膨大となるという欠点があるものの、ほぼ機械的に大域的最適解を得ることができることが知られている。そこでレイリー商の和における半定値緩和という操作の幾何学的意味を微分幾何学的観点から明らかにすることができると考えられる。

その後、半正値同次型 4 次形式関数の最適化のための半定値計画緩和の幾何学について取り組むという流れになる。

そして最終的に半正値同次型 4 次形式の比の和で表される関数の最適化に取り組む、という手順によって研究が実行されることが期待できる。

また、これらと同時に、本研究を工学的に応用することを考える。

コンピュータビジョンにおいて全方位画像を扱いやすくするためにピンホール画像へと変換することがしばしば行なわれ、これはカメラの較正またはキャリブレーションと呼ばれる。全方位カメラの歪み方を表現する手法によっては、カメラの較正から導かれる最適化問題が、4 次形式の比の和の最適化となることが知られているため、本研究をカメラの較正へと応用することを考える。

4 次形式の比の和の最適化の雛形として 2 次形式やレイリー商の和の最適化が挙げられるが、その最適化の幾何学の理解のための足掛かりとして、パターン認識における基本的な道具の 1 つである、判別分析の幾何学、

そしてカーネル主成分分析の幾何学についても検討することを考える。

特にカーネル主成分分析の双対となり得るカーネル劣成分分析を考える場合にカーネルとして有限次元のカーネルを選択すると、レプリゼンタ定理における係数ベクトルの決定はレイリー商の和の最適化となることが知られている。この最適化の幾何学を理解するために、カーネルの次元を有限次元から無限次元へと上げた場合、例えばガウスクーネルを用いたカーネル劣成分分析を考えた場合にどのような幾何学が得られるかについても考える。

#### 4. 研究成果

本研究の最終的な課題である、半正値 4 次形式の比の和の最適化の幾何学を解明するには至らなかった。

しかし、その解決への道程の中で、いくつかの知見を得ることができた。

その第 1 は、多項式最適化の幾何学を考えるためには、グレブナ基底という代数的な操作が重要な役割を果たす可能性を見出すことができたことである。グレブナ基底は代数体上の多項式環であるから、多項式最適化を知る上での鍵となることは自然である。しかし本研究のような有理式体の最適化を理解するためには、グレブナ基底をさらに拡張する必要があるかも知れない。

第 2 の知見は、カーネル劣成分分析を考えたとき、レプリゼンタ定理が成立しないことが分かったということである。言われてみれば自明な事柄ではあるものの、このことが明確に書かれた書物が見当らなかったため、本研究で初めて明らかになった事柄と言えるだろう。

また、本研究を遂行する上で、工学的な応用である、直線度に基づく放射対称歪曲画像の較正手法の提案を行なった。また特殊相対性理論の基で光速度が有限となることから生じる画像の歪みが放射対称歪曲となることから、準光速で等速直線運動をする物体から見た景色を静止系へと変換することができるというトイプロブレムも解決した。そして 2 次形式の幾何学を考察する上でクラス部分空間に着目した新しい判別分析についても考察を行なった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 10 件)

(1) 坂野鋭, 木村昭悟, 藤木淳, クラス部分

空間に着目した判別分析, 第 16 回画像の認識・理解シンポジウム(MIRU2013), 2013 年 8 月

(2) 日野英逸, 藤木淳, 赤穂昭太郎, 望月義彦, 村田昇, Pairwise Similarity for Line Extraction From Distorted Images, 15th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP2013), 2013 年 8 月

(3) 藤木淳, 赤穂昭太郎, Flexible hypersurface fitting with RBF kernels, 15th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP2013), 2013 年 8 月

(4) 日野英逸, 藤木淳, 赤穂昭太郎, 望月義彦, 村田昇, データ対の直線性に基づく画像上の類似度の定義 ~ 歪曲画像からの直線検出への応用 ~, 電子情報通信学会 PRMU 研究会, 2013 年 6 月

(5) 藤木淳, Finding discriminant axes from multiple viewpoints, The 13<sup>th</sup> IAPR in International Conference on Machine Vision Applications(MVA2013), 2013 年 5 月

(6) 藤木淳, 赤穂昭太郎, 日野英逸, 村田昇, Robust hypersurface fitting based on random sampling approximations, 19<sup>th</sup> International Conference on Neural Information Processing(ICONIP2012), 2012 年 11 月

(7) 藤木淳, 日野英逸, 赤穂昭太郎, 村田昇, Calibration of radially symmetric distortion based on linearity in the calibrated image, The workshop on Omnidirectional Vision, Camera Networks and Non-classical Cameras (OMINIVIS2011), 2011 年 11 月

(8) 城真範, 藤木淳, 赤穂昭太郎, 田中勝, 来るべき宇宙世紀へ向けて - 亜光速下における画像からの静止系座標 -, 日本物理学会年次大会, 2012 年 9 月

(9) 藤木淳, 城真範, 赤穂昭太郎, 田中勝, 準光速で等速直線運動するカメラの幾何学, 第 15 回画像の認識・理解シンポジウム(MIRU2012), 2012 年 8 月

(10) 藤木淳, 赤穂昭太郎, 日野英逸, 村田昇, 較正画像における直線度の最大化に基づく放射対称歪曲の較正, 第 14 回画

像の認識・理解シンポジウム(MIRU2011) ,  
2011年7月

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

藤木 淳 (FUJIKI, Jun)  
福岡大学・理学部・准教授  
研究者番号：10357907

### (2) 研究分担者

赤穂 昭太郎 (AKAHO, Shotaro)  
産業技術総合研究所・ヒューマンライフテ  
クノロジー研究部門・グループ長  
研究者番号：40356340

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：