

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2011～2014

課題番号：23686024

研究課題名(和文)非線形超音波共鳴法の開発

研究課題名(英文)Development of nonlinear resonant ultrasound spectroscopy

研究代表者

垂水 竜一(Tarumi, Ryuichi)

大阪大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30362643

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 13,100,000円

研究成果の概要(和文): 固体材料の共鳴周波数を計測・逆解析することで、その材料の持つ二次弾性定数を決定する方法を超音波共鳴法という。本研究では、超音波共鳴法の基礎理論を非線形弾性体へ拡張するとともに、Ritz法に基づく数値解析を行った。その結果、非線形弾性体の共鳴振動が従来の点群・既約表現ではなく、カラー対称性を備えた磁性点群によって記述されることを明らかとした。また本理論を応用すれば、共鳴周波数の圧力依存性の実験計測とその逆解析によって、原理的にはほぼ全ての独立な三次弾性定数が決定できることを明らかとした。これらの成果は、本研究の主目的である非線形超音波共鳴法の基礎理論の完成を意味している。

研究成果の概要(英文): The second-order elastic constants (SOECs) of a solid can be determined from free-vibration acoustic resonance (FVAR) frequencies of the medium. This method, called resonant ultrasound spectroscopy, is the state-of-the-art technique for measuring the SOECs. The aim of this study is to generalize the theory of FVAR so as to determine the third-order elastic constants (TOECs) in addition to SOECs. First, we developed the theory of nonlinear FVAR for two-dimensional isotropic medium. It revealed that there exists a new type of vibration symmetry, called the colour symmetry, in nonlinear FVAR modes. We also revealed that the vibration modes can be classified on the basis of magnetic point groups rather than conventional irreducible representations of a point group. We then developed quasilinear FVAR theory for three-dimensional and anisotropic elastic medium. Numerical analysis revealed that nearly the entire TOECs can be determined from pressure dependence of FVAR frequencies.

研究分野：弾性理論、固体力学、材料科学

キーワード：超音波共鳴法 弾性定数 非線形弾性理論 固体力学

1. 研究開始当初の背景

全ての固体材料は固有の振動数、いわゆる共鳴周波数を有している。直方体形状に切り出した単結晶材料の共鳴周波数を超音波スペクトル計測実験によって測定し、得られた周波数を線形共鳴振動理論を用いて逆解析すれば、その固体材料の持つ全ての独立な二次弾性定数 C_{ijkl} を決定することができる。この方法は超音波共鳴法 (Resonant Ultrasound Spectroscopy: RUS 法) と呼ばれており、現行の二次弾性定数計測法の中でも特に優れた方法として広く認知されている。

RUS 法は、これまで様々な金属・セラミックス材料の弾性定数計測に用いられてきたが、この方法で計測される弾性定数は二次弾性定数 C_{ijkl} に限られており、三次以上の高次弾性定数を計測することは原理的に不可能であった。これは、共鳴周波数の逆解析に用いる線形共鳴振動理論の構成式に線形近似 (線形弾性理論) が用いられていることによる。換言すると、この理論では三次弾性定数を用いることなく共鳴周波数を計算している。線形近似のもう一つの弊害は、客観性公理の破綻である。良く知られているように、全ての物理量はその値が観測座標系に依らず不変であること、いわゆる客観性公理を満足することが求められている。ところが、線形弾性理論の構成式は客観性公理を満たしておらず、したがって従来の線形共鳴振動理論が描く共鳴振動現象もまた、客観性公理が破綻している。それでは、この理論の客観性を回復させることで得られる本来の共鳴振動現象には、従来の近似理論では表現することのできなかつた本質的な相違点が現れるのだろうか？

これらの問題を解決するためには、約 1 世紀前にレイリー卿と数学者リッツによって構築された従来の線形共鳴振動理論を、非線形共鳴振動理論として一般化する必要がある。ところがこのような視点からの研究はこれまでのところ全く行われていない。固体材料の共鳴振動は、バイオリンの弦やピアノ線の共振、お寺や教会の鐘の音などに代表されるように、私達の身の回りにありふれた物理現象である。それにも関わらず、その実体は未だに十分には理解されていない。

2. 研究の目的

上記の問題を根本的に解決するため、本研究では、以下に示す二つの研究目標を設定する。

- (i) 従来の線形共鳴振動理論の構成式に幾何学的非線形項を導入することで、客観性公理の回復した非線形共鳴振動理論を新たに構築する。更にその数値解析によって、固体材料の共鳴振動現象の持つ本来の性質を明らかにする。
- (ii) 従来の線形共鳴振動理論の構成式に幾何学的非線形項と力学的非線形項を導入し、更に準調和近似を併用することによって、共鳴周波数から固体材料の三次弾性定数

C_{ijklmn} の計測を可能とする新しい理論的な枠組み (準線形共鳴振動理論) を構築する。

従来、三次弾性定数 C_{ijklmn} の計測には結晶方位の異なる大型の単結晶試料が必要とされてきたため、この材料定数が計測されている金属・セラミックス材料はごく一部のものに限られてきた。本研究の遂行によって共鳴周波数と三次弾性定数の関係が明らかとなれば、従来の RUS 計測を応用することによって、これまで計測が困難であった C_{ijklmn} の評価が容易となり、力学原理に基づいた材料設計が推進される。

3. 研究の方法

一般に、弾性理論には二種類の非線形性が存在する。一つは幾何学的非線形性と呼ばれるもので、これはひずみテンソルを修正して構成式の客観性を回復させる働きを持つ。もう一つの要素は力学的非線形性と呼ばれている。これは材料を構成する原子間相互作用の非調和性を反映しており、その程度を表す材料定数が三次弾性定数である。したがって、固体材料の共鳴振動現象に客観性公理を回復させ、その上で三次弾性定数を決定するためには、上記二つの非線形性を同時に考慮する必要がある。しかしながら、この解析では理論が極めて複雑になる上に、数値計算のコストが膨大となるため現実的ではない。

そこで本研究では、まずは解析の容易な二次元モデルを採用して客観性公理のみを回復させた非線形共鳴振動理論を構築し、これによって共鳴振動現象の持つ本来の特性を明らかにすることを目指した。解析には最小作用の原理とリッツ法を用いる。最小作用の原理とは、弾性体の運動エネルギー密度 T とひずみエネルギー密度 W の時間・空間積分として作用汎関数 $I[u_i]$ を次のように定義し、

$$I[u_i] = \int_0^{2\pi/\omega} \int_{\Omega} (T - W) dV dt.$$

この汎関数が最小となる変位 u_i を求める方法である。ここで弾性体の構成式はひずみエネルギー密度 W によって決定されるが、本研究ではこの W に幾何学的非線形項を導入することで従来の理論を一般化している。リッツ法はこの変分問題を解くための数値計算法の一つである。

後述するように、上記の解析によって非線形共鳴振動に埋め込まれた新しい振動対称性 (カラー対称性) と、その集合が構成する群構造 (磁性点群) を明らかとすることができた。この性質と物性物理学で利用されている準調和近似理論を併用して作り上げた理論が準線形共鳴振動理論であり、これによって客観性公理を満足し、かつ力学的非線形性を有する、三次元弾性体の共鳴振動解析が可能となった。

4. 研究成果

まず初めに構築したのが非線形共鳴振動理論である (発表論文②, ⑤). ここではまず, この理論を用いて行った二次元モデルに対する数値解析結果を説明する. 図 1 に示すのは数値計算によって得られた非線形共鳴振動パターン ($A_1' - 2$ モード) である. 図中の(a)は非線形共鳴振動そのものを表しており, (b)~(e)はこの中に含まれる角振動数の異なる変位成分である. 換言すると, 図 1 (b)~(e)の総和が図 1 (a)である. (ただし, 共鳴振動変位の振幅は n 値に依存して大きく異なるため, 変位の表示倍率は各 n 値毎に適宜調整している). 図において, (c)は(a)に含まれている調和振動成分を表している. 一方, (b)は $n=0$ の静止成分, (d)は $n=2$ の二次高調和成分, (e)は $n=3$ の三次高調和成分をそれぞれ表している. (b), (d), (e)は何れも弾性体の幾何学的非線形性によって発現した振動成分であり, 従来の線形共鳴振動理論では現れない本質的な相違点となっている. 次に共鳴振動の対称性について考えると, (b)~(e)の各成分は全ての時刻で A_1 対称性を有しており, したがってその重ね合わせの(a)もまた全時刻で A_1 対称性を持つ. この数値計算結果は, 従来の点群と既約表現に基づく対称性の予測結果と矛盾しない.

次に同様の解析を $B_1' - 2$ モードに対して行った結果を図 2 に示す. ここで図中の(a)~(e)は図 1 と同様の意味を有している. 図を見ると, n が奇数となる(c)と(e)についてはほぼ全ての時刻において予想通り B_1 対称性が現れているが, 驚くべきことに, n が偶数となる(b)と(d)で現れる対称性は全時刻において A_1 対称性である. すなわち, $B_1' - 2$ モードの共鳴振動現象には, B_1 対称性と A_1 対称性という二つの対称性が, n 値のパリティ (偶奇性) に応じて交互に出現することになる. 同様の解析を B_2' モードおよび A_2' モードに対しても行ったが, 結果は B_1' モードと本質的に同様で, 前者は B_2 対称性と A_1 対称性という二つの対称性が, 後者は A_2 対称性と A_1 対称性という二つの対称性が, やはり n 値のパリティに応じて出現することが明らかとなった.

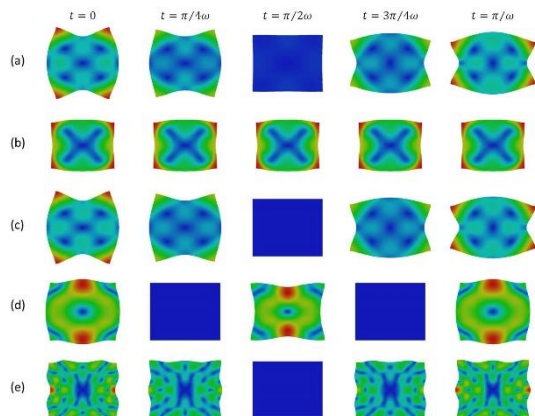


図 1: (a) $A_1' - 2$ モードの非線形共鳴振動. (b)~(e)は(a)に含まれる変位成分を表しており, それぞれ角振動数 ω の係数が (b) $n = 0$, (c) $n = 1$, (d) $n = 2$, (e) $n = 3$ に対応している (発表論文③より).

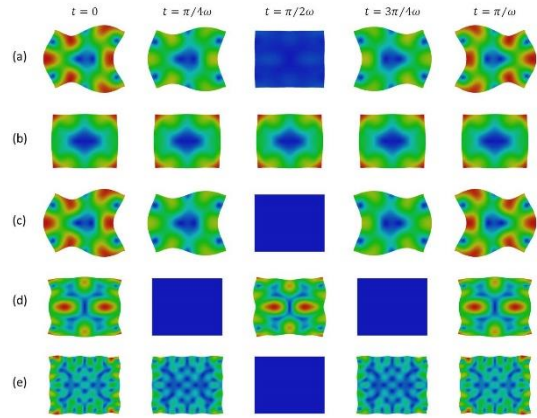


図 2: (a) $B_1' - 2$ モードの非線形共鳴振動. (b)~(e)は(a)に含まれる変位成分を表しており, それぞれ角振動数 ω の係数が (b) $n = 0$, (c) $n = 1$, (d) $n = 2$, (e) $n = 3$ に対応している (発表論文③より).

B_1' , B_2' および A_2' モードに見られた共鳴振動対称性は, 線形近似を用いた従来の線形共鳴振動理論には現れず, そのためこれまで共鳴振動対称性を記述してきた点群 (既約表現) では説明することができない. 換言すると, 図 2 に現れた共鳴振動対称性は, 客観性公理の回復によって描き出された共鳴振動現象の本来の姿であると考えられる. したがって, この振動対称性の起源を合理的に説明することができれば, この物理現象の本質を理解したことを意味する. 本研究では, 群論に基づく数理的な立場からこの対称性解析を進めたが, その結果辿り着いたのがカラー対称性を備えた磁性点群である.

磁性点群は, 従来の点群に時間反転演算子 \hat{T} を導入してこれを一般化した群の概念であり, 量子力学や素粒子物理学で使用されている. ここではまず数学的な定義に従って磁性点群を導入する. いま, 解析の対象である二次元弾性体が属する点群 C_{2v} を位数 2 で剰余類分解し, 次に時間反転演算子 \hat{T} を恒等操作 E を含まない部分群にかけて両者の和を取ると, 次に示す 3 種類の群が導かれる.

$$\begin{aligned} C_{2v}(C_2) &= \{E, C_2\} + \hat{T}\{\sigma_x, \sigma_y\}, \\ C_{2v}(C_x) &= \{E, \sigma_x\} + \hat{T}\{C_2, \sigma_y\}, \\ C_{2v}(C_x) &= \{E, \sigma_x\} + \hat{T}\{C_2, \sigma_y\}. \end{aligned}$$

これらは何れも二色 (白色と黒色) の磁性点群と呼ばれており, $\hat{T}\{\cdot, \cdot\}$ により表された対称操作がカラー対称性である. これに対して, 従来の点群 C_{2v} は磁性点群の表記法では次のように表すことができる.

$$C_{2v}(C_{2v}) = \{E, C_2, \sigma_x, \sigma_y\}$$

これは単色の磁性点群と呼ばれている. これ

らの磁性点群に対して、演算子 \hat{T} の定義する時間反転軸を図 1, 2 における $t = \pi/\omega$ に設定する。こうすると、数値解析を行った 4 つの非線形共鳴振動モードの振動対称性は、それぞれここに挙げた 4 つの磁性点群 (の持つ射影演算子) によって完全に説明することができる。

この解析結果の妥当性について検討するため、本研究では Acoustic Overtone モデルとの定性的な比較・検証を進めた。Acoustic Overtone モデルとは、分子振動現象に現れる非線形効果を説明するために導入された群の応用モデルである。詳細は省略するが、この解析方法を用いて非線形弾性体の共鳴振動対称性を解析した結果は、上記の数値計算結果、および磁性点群による振動対称性の予測結果と完全に一致することが明らかとなった。この結果は、固体材料の共鳴振動現象の中には、カラーと呼ばれる新しい振動対称性が含まれること、またその対称性の集合が磁性点群と呼ばれる群構造を持つことが確定されたことを意味している。

上記の理論と数値計算方法は、非線形共鳴振動現象を正確に捉えることができる一方で、その計算コストは膨大である。そのため、この解析方法は二次元弾性体に限られており、これを現実の三次元弾性体へと適用することは困難である。さらに、この理論では三次弾性定数を評価するために不可欠な力学的非線形効果が含まれておらず、したがってこの理論を用いても、共鳴周波数から三次弾性定数を決定することはできない。そのため新たに作り直した理論が準線形共鳴振動理論 (発表論文①) である。

準線形共鳴振動理論では、弾性体の共鳴周波数と三次弾性定数を直接的に結び付けることを目的としており、それ以外の非主要な寄与は極力取り除くこととした。このために新たに導入したアイデアが弾性体に対する一様な静水圧の負荷と準調和近似である。準調和近似は物性物理学で使用される近似方法の一つであり、具体的には、弾性体に生じる変位の関数形が静水圧による一様で時間に依存しない体積収縮項と従来の線形モデルと同様の調和振動項の二種類に限定する考え方である。準調和近似は理論の数値解析に必要な計算コストを大幅に削減することから、この近似と先に示した磁性点群の併用によって、現実の三次元結晶をモデルとした共鳴振動解析が可能となった。

準線形共鳴振動理論では、共鳴周波数の圧力依存性を解析することが可能である。そこで、既に三次弾性定数の報告されている FCC, BCC および HCP 結晶を対象として、その共鳴周波数の圧力依存性を計算した。さらに、得られた結果を熱力学関係式へ代入することで、1 次～2,400 次までの共鳴振動モード毎のグリューナイズン定数を計算し、その統計平均を算出した。このようにして得られたグリューナイズン定数を従来のグリューナイズン

定数の報告値と比較した結果、両者はほぼ全ての金属材料について誤差 10% 以内で定量的に一致することが明らかとなった。この結果は、本研究で構築した準線形共鳴振動理論が定量的な意味で妥当であることを強く支持している。この結果、現実の単結晶試料の共鳴周波数とその圧力依存性を実験計測すれば、準線形共鳴振動理論に基づいたその逆解析によって、原理的には全ての独立な二次弾性定数と、ほぼ全ての独立な三次弾性定数が決定可能となった。

本報告書の冒頭に示した通り、本研究の目的は共鳴振動を利用した三次弾性定数計測法の開発にある。準線形共鳴振動理論の完成は、この計測の基盤となる理論が構築されたことを意味している。この成果に加えて、本研究では当初は予想さえしなかった共鳴振動現象の持つ新しい対称性とその群構造を明らかにすることもできた。本研究は、当初の研究目標を上回る理想的な形で遂行することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

- ① R. Tarumi, Y. Yamaguchi and Y. Shibutani
Theoretical Foundations of Resonant Ultrasound Spectroscopy at High Pressure
Proceedings of the Royal Society A 470, 20140448 (2014), 査読有.
- ② R. Tarumi, S. Yamada and Y. Shibutani
Free-vibration acoustic resonance of nonlinear hyperelastic materials
Jpn. J. Appl. Phys., 53, 07KB09 (2014), 査読有.
- ③ 垂水 竜一
弾性体の非線形共鳴振動 ～固体中の音波が持つ新しい対称性について～
超音波 TECHNO, 第 26 巻, 第 6 号, pp. 92-97 (2014), 査読無.
- ④ R. Tarumi, H. Ledbetter, H. Ogi and M. Hirao
Low-temperature elastic constants of monocrystal corundum (α -Al₂O₃)
Philosophical Magazine 93, pp.4532-4543 (2013), 査読有.
- ⑤ R. Tarumi
Emergence of colour symmetry in free-vibration acoustic resonance of a nonlinear hyperelastic material
Proceedings of the Royal Society A 469, 20130275 (2013), 査読有.

- ⑥ 垂水 竜一
電磁超音波共鳴法による金属材料評価の新展開
超音波 TECHNO, 第 25 巻, 第 2 号, pp. 69-73 (2013), 査読無.
- ⑦ R. Tarumi, S. Yamada and Y. Shibutani
Acoustic resonance of a two-dimensional isotropic medium studied using Airy stress function
Jpn. J. Appl. Phys. 51, 07GA03 (2012), 査読有.
- ⑧ R. Tarumi, T. Matsuhisa and Y. Shibutani
Low temperature elastic constants and piezoelectric coefficients of LiNbO_3 and LiTaO_3 : resonant ultrasound spectroscopy measurement and lattice dynamics analysis
Jpn. J. Appl. Phys. 51, 07GA02 (2012), 査読有.
- ⑨ 垂水 竜一
非線形超音波共鳴法の最新動
超音波 TECHNO, 第 24 巻, 第 3 号, pp. 38-42 (2012), 査読無.
- ⑩ Ryuichi Tarumi, Tomohiro Matsuhisa and Yoji Shibutani
Numerical analysis for acoustic resonance of one-dimensional nonlinear elastic bar
Jpn. J. Appl. Phys. 50, 07HB02 (2011), 査読有. .
- ⑪ Ryuichi Tarumi, H. Nitta, H. Ogi and M. Hirao
Low-temperature elastic constants and piezoelectric coefficients of langasite ($\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$)
Philosophical Magazine , 91, 2140-2153 (2011), 査読有. .
- ⑫ Ryuichi Tarumi and Yoshihito Oshita
Free Vibration Acoustic Resonance of Nonlinear Elastic Bar
Philosophical Magazine , 91, 772-786 (2011), 査読有. .

[学会発表] (計 19 件)

- ① 山口悠太, 垂水 竜一, 渋谷陽二
非線形弾性体の共鳴振動と準調和近似
関西支部第 90 期定時総会講演会 (2015. 3. 16-17, 京都大学)
- ② 八木皓世, 垂水 竜一, 渋谷陽二
一次元非線形連鎖モデルの共鳴振動特性解析

関西学生会平成 26 年度学生員卒業研究発表講演会 (2015. 3. 14, 京都大学)

- ③ 山口悠太, 垂水 竜一, 渋谷陽二
斜方晶結晶に対する共鳴周波数の圧力依存性解
第 35 回 超音波エレクトロニクスの基礎と応用に関するシンポジウム (2014. 12. 3-5, 明治大学)
- ④ 垂水 竜一
弾性理論に現れる二つの非線形性 (依頼講演)
(日本金属学会九州支部・日本鉄鋼協会九州支部 第 308 回材料科学談話会, 2014. 11. 25, 九州大学総合理工学府)
- ⑤ 垂水 竜一
非線形弾性体の共鳴振動とその応用 (招待講演)
(非線形力学セミナー (第 9 回 ILM 勉強会), 2014. 11. 21, 大阪大学基礎工学研究科)
- ⑥ 山口悠太, 垂水 竜一, 渋谷陽二
準線形超音波共鳴振動理論の構築
(日本機械学会 第 27 回計算力学講演会, 2014. 11. 22-24, 岩手大学)
- ⑦ 垂水 竜一
金属材料の非線形力学特性評価への試み (村上奨励賞受賞講演)
日本金属学会 2014 秋期講演大会 (2014. 9. 24-26, 名古屋大学)
- ⑧ Ryuichi Tarumi
Color symmetry embedded in resonant vibration of nonlinear solids
The 21st International Congress of Sound and Vibration
(2014. 7. 13-17, Beijing, China)
- ⑨ 垂水 竜一, 山田晋平, 渋谷陽二
非線形超弾性体の共鳴振動解析
第 34 回 超音波エレクトロニクスの基礎と応用に関するシンポジウム (2013. 11. 20-22, 同志社大学)
- ⑩ 山口悠太, 垂水 竜一, 山田晋平, 渋谷陽二
磁性点群による非線形共鳴振動モードの分類
第 34 回 超音波エレクトロニクスの基礎と応用に関するシンポジウム (2013. 11. 20-22, 同志社大学)
- ⑪ 垂水 竜一, 山田晋平, 渋谷陽二
St. Venant-Kirchhoff 型二次元超弾性体の共鳴振動解析
日本金属学会 2013 年春期大会

(2013. 3. 27-29, 東京理科大学)

- ⑫ 山田晋平, 垂水竜一, 渋谷陽二
St. Venant-Kirchhoff 型超弾性体に対する共鳴振動解析
関西支部第 88 期定時総会講演会
(2013. 3. 16-17, 大阪工業大学)
- ⑬ 山口悠太, 垂水竜一, 山田晋平, 渋谷陽二
非線形超音波共鳴理論の構築とその検証
関西学生会平成 24 年度学生員卒業研究
発表講演会(2013. 3. 15, 大阪工業大学)
- ⑭ Ryuichi Tarumi
Nonlinear resonant ultrasound
spectroscopy for one-dimensional
hyperelastic solid
23rd International Congress of
Theoretical and Applied Mechanics
(2012. 8. 19-24, Beijing, China)
- ⑮ 松久朋弘, 垂水竜一, 渋谷陽二
一次元非線形弾性体の共鳴振動解析
日本機械学会関西支部第 86 期定時総会
講演会(2011. 3. 19-20, 京都工芸繊維大学)
- ⑯ 山田晋平, 垂水竜一, 渋谷陽二
磁性点群による非線形共鳴振動モードの
分類
第 33 回 超音波エレクトロニクスの基
礎と応用に関するシンポジウム
(2012. 11. 13-15, 千葉大学)
- ⑰ 垂水竜一, 松久朋弘, 渋谷陽二
LiNbO₃ および LiTaO₃ 単結晶の低温域に
おける弾性定数と圧電定数
第 32 回 超音波エレクトロニクスの基
礎と応用に関するシンポジウム
(2011. 11. 8-10, 京都大学)
- ⑱ 山田晋平, 垂水竜一, 渋谷陽二
Airy の応力関数を用いた二次元線形弾
性体の共鳴振動理論
第 32 回 超音波エレクトロニクスの基
礎と応用に関するシンポジウム
(2011. 11. 8-10, 京都大学)
- ⑲ Ryuichi Tarumi and Yoji Shibutani
Acoustic resonance of nonlinear
elastic bar and its application to
RUS
International congress on
ultrasonics (2014. 9. 5-8, University
of Gdansk, Poland).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

垂水 竜一 (TARUMI, Ryuichi)
大阪大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号: 30362643