

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23700009

研究課題名(和文) 解析学及び幾何学における計算量

研究課題名(英文) Computational Complexity in Analysis and Geometry

研究代表者

河村 彰星 (Kawamura, Akitoshi)

東京大学・情報理工学(系)研究科・助教

研究者番号：20600117

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、解析学における計算量を理解するという目標に、(1)理論的枠組の確立、(2)諸問題への応用、の両面で貢献を目指すものであった。理論面(1)では、実数など近似によって捉えられる対象の計算における資源制約を議論するため、二階多項式を用いた枠組を使うことにより、従来よりも多くの対象について計算量を論ずることができるようになった。応用面(2)では、予めから解析関数において各種の演算子の計算量が知られていたが、本研究ではこの解析関数という範囲を超えた所で如何なる計算量になるかについて、幾つかの結果を得た。

研究成果の概要(英文)：(1) Foundation of computational complexity in mathematical analysis using type-two complexity and theory of representations
(2) Computational complexity of problems involving analytic functions and some slightly larger classes of functions

研究分野： 算法と計算量

キーワード： 計算量 数値計算 計算可能解析

1 . 研究開始当初の背景

様々な計算問題の困難さの度合を測り、或いは困難そのものの本質を明らかにしようとするのが、計算理論（帰納函数論及び計算量理論）である。計算の限界を探ることは、それ自体が数学的に興味深い問であるのみならず、良い算法を設計する指針にもなる。つまり、効率の優れた算法の設計（計算量を上から抑える）と、困難さの立証（計算量を下から抑える）とは、理論計算機科学において互いに補い合う車の両輪といえる。

ただ従来この相補は、古典的な計算模型に馴染み易い文字列、整数、グラフなど離散的の対象を扱う問題にほぼ限られていた。連続的な対象（実数などを含む数値問題）においては、算法に関する知識の蓄積に比して困難さの理解が遅れていたのである。

このように離散的な手順の議論である計算理論を、実数の絡む連続の世界の問題へ応用する研究は、（時間効率などを考えない）計算可能性の議論については歴史の長いものである（帰納解析学）。これをうまく計算量のレベルに精密化することが求められていた。

2 . 研究の目的

このような実数計算における複雑さの研究は、計算機による数値算法の能力と限界を究明するという実際上の意義があるのみならず、従来計算の観点を入れずに記述されてきた数学的諸現象をより重層的に理解することにも繋ぐと期待される。このことから、理論構築とその実際の問題への応用の両面、すなわち

- (1) 帰納解析学で従来から使われている理論的枠組を、計算量の理論ができるよう精密化する
- (2) これを適用して具体的な幾つかの問題について計算量（複雑さ）を明らかにする

の両方を目標とした。

3 . 研究の方法

理論面（1）では、研究期間の開始時点で既に、限られた場合においては多項式時間という制限を扱うための基本的な数学的定義は知られていた。これを整備して強固なものとし、新たな計算量級を扱う方法を探るとともに、実数計算に関する各分野の既存の理論（特に計算可能性を論ずるのに役立っている二型計算と表現の理論）との関係を明らかにすることを目指すこととした。

（2）の応用先としては、元々帰納解析の分野でよく調べられていた問題に題材を求め、計算量がわかっている範囲を少しでも広げることが目標とした。特に最も重要な資源制限は「多項式時間」というものであるので、

これに関して従来から多くの結果が知られていた解析函数の扱いを特に取り上げ、その周辺で計算量がどのように変わるかを調べることにした。また主に題材とする演算子としては、実数計算ならではの特徴的な様相を呈する題材として微分方程式を取り上げることにした。

この研究は帰納解析、計算量、数値解析の三分野に跨がるものであるから、議論や成果発表の場もそれぞれで行い、各分野の専門家と協力することにした。

4 . 研究成果

本研究は、解析学における様々な問題の計算量を理解するという目標に、（1）理論的枠組の確立、（2）諸問題への応用、の両面から貢献を目指すものであった。主な成果は次の通り。

理論面（1）では、実数など近似によって捉えられる対象の計算における資源制約を議論するため、二階多項式を用いた枠組を使うことにより、従来よりも多くの対象（実函数にはたらく演算子など）について計算量を論ずることができるようになった [論文 2, 発表 17, 19]。また、この枠組を多項式時間よりも小さい計算量級に適用する際の精密化のしかた [発表 4, 11] や、多項式時間という制限の範囲内で函数空間の構成ができるための条件 [発表 20] についても、部分的な結果を得た。

応用面（2）では、予てから解析函数においては各種の演算子の計算量が多項式時間で済むことが知られており、これが解析函数以外でどのようになるかが次なる課題であった。本研究で、函数が滑らかであるのみでは直ちに微分方程式などの計算量が抑えられないこと [論文 1, 発表 15, 16, 18]、しかし解析函数に近いジュブレの級と呼ばれる函数については、その近さを表す指標に応じた計算量となること [発表 12, 13] などがわかった。また微分方程式についての事例研究として、ラプラス方程式・ポアソン方程式について幾つかの問題の計算量の下界を示した [発表 8, 9]。算法ランダム性との関係についても、従来計算可能性のレベルで指摘されていた性質の一部が多項式時間へ精密化できることがわかった [発表 5, 10]。

これらの成果は次項に示すように、数理論理学系の計算理論の研究集会（CTFM, CCC, CiE など）や、一般の理論計算機科学分野の研究集会（コンピュテーション研究会, LA シンポジウム, ISAAC, MFCS など）で発表したほか、関連分野の国際論文誌（ACM ToCT, LMCS）にも掲載された。

なお当初の研究計画は平成 23 年度からの三年間であり、三年目である 25 年度には集中講義や招待講演の機会を得て、この研究課題に深く関連する話題の基礎から最近の動向まで、大学院生を含めた隣接分野の研究者

に紹介することができた [発表 3, 6, 7]. 延長した 26 年度には, 主にそれまでに得られていた結果について 4 月の陰計算量理論の研究集会で発表した [発表 1].

以上の経緯と結果を踏まえ, 平成 26 年度からの「連続系計算量理論の深化と展開」でも関連する内容について更に研究を進める計画である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

[1] A. Kawamura, H. Ota, C. Rösnick and M. Ziegler. Computational complexity of smooth differential equations. *Logical Methods in Computer Science* 10 (1), Article 6, February 2014. (査読あり)

[2] A. Kawamura and S. Cook. Complexity theory for operators in analysis. *ACM Transactions on Computation Theory* 4 (2), Article 5, May 2012. (査読あり)

[学会発表] (計 20 件)

[1] A. Kawamura. Applying higher-type complexity to analysis. Fifth Workshop on Developments in Implicit Computational Complexity (DICE). Grenoble, France, April 5, 2014. (招待講演)

[2] R. Fraser, M. He, A. Kawamura, A. López-Ortiz, J. I. Munro and P. K. Nicholson. The distance 4-sector of two points is unique. In *Proc. 24th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC)*. Hong Kong, December 18, 2013.

[3] 河村. 計算資源としての乱択. 京都大学大学院人間環境学研究所数理科学講座談話会. 京都府京都市左京区, 平成 25 年 12 月 4 日. (招待講演)

[4] A. Kawamura. Small type-two complexity classes for computable analysis. NII Shonan Seminar 033: Implicit Computational Complexity and Applications: Resource Control, Security, Real Number Computation. Hayama, Japan, November 4, 2013.

[5] 河村, 宮部. 多項式時間ランダム性と微分可能性. 日本数学会秋季総合分科会. 愛媛県松山市, 平成 25 年 9 月 26 日.

[6] 河村. 連続系の計算量. 新学術領域研

究「計算限界解明」計算量理論秋学校. 長野県北佐久郡軽井沢町, 平成 25 年 9 月 25 日. (招待講演)

[7] 河村, (集中講義) 実数の計算理論. 京都大学大学院理学研究科. 京都府京都市左京区, 平成 25 年 7 ~ 8 月.

[8] A. Kawamura, F. Steinberg and M. Ziegler. Complexity of Laplace's and Poisson's Equation compared to ordinary integration. Logic Colloquium (LC). Évora, Portugal, July 22, 2013.

[9] A. Kawamura, F. Steinberg and M. Ziegler. On the Computational Complexity of Laplace's and Poisson's Equations. Tenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis (CCA). Nancy, France, July 10, 2013.

[10] A. Kawamura and K. Miyabe. Polynomial-time randomness and differentiability. Computability in Europe (CiE). Milan, Italy, July 1, 2013.

[11] A. Kawamura. On small complexity classes for computable analysis. Continuity, Computability, Constructivity -- From Logic to Algorithms (CCC). Gregynog, Swansea University, Wales, UK, June 27, 2013.

[12] A. Kawamura, N. Müller, C. Rösnick and M. Ziegler. Parameterized uniform complexity in numerics: from smooth to analytic, from NP-hard to polytime. Workshop on Computability Theory and Foundations of Mathematics (CTFM). Tokyo, Japan, February 20, 2013.

[13] 河村, ツィーグラー, ミュラー, レースニク. 解析函数の表現と計算量について. 冬のエルエーションポジウム. 京都府京都市左京区, 平成 25 年 1 月 30 日.

[14] R. Dorrigiv, R. Fraser, M. He, S. Kamali, A. Kawamura, A. López-Ortiz and D. Seco. On minimum- and maximum-weight minimum spanning trees with neighborhoods. In *Proc. Tenth Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA)*, Ljubljana, Slovenia, September 13, 2012.

[15] A. Kawamura, H. Ota, C. Rösnick and M. Ziegler. Computational complexity of smooth differential equations. In *Proc. 37th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS)*. Bratislava, Slovakia,

August 30, 2012.

[16] A. Kawamura. Computational complexity of ordinary differential equations. Ninth International Conference on Computability and Complexity in Analysis (CCA). Cambridge, UK, June 25, 2012. (招待講演)

[17] A. Kawamura. Representations for polynomial-time computability. Continuity, Computability, Constructivity -- From Logic to Algorithms (CCC). Trier, Germany, May 30, 2012. (招待講演)

[18] 太田, 河村, ツィーグラー, レースニク. 滑らかな常微分方程式の計算量. 冬のエルエーションポジウム. 京都府京都市左京区, 平成 24 年 1 月 31 日.

[19] 河村, クック. 解析学における高階計算量. 電子情報通信学会コンピュータシオン研究会. 宮城県仙台市青葉区, 平成 23 年 10 月 21 日.

[20] A. Kawamura. On function spaces and polynomial-time computability. Dagstuhl Seminar 11411 "Computing with Infinite Data: Topological and Logical Foundations". Wadern, Germany, October 11, 2011.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河村彰星 (KAWAMURA, Akitoshi)
東京大学・情報理工学系研究科・助教
研究者番号: 20600117

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし