

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23700015

研究課題名(和文) 計算困難問題に対する厳密指数時間アルゴリズムの研究

研究課題名(英文) Studies on Exact Exponential Time Algorithms for Computationally Intractable Problems

研究代表者

玉置 卓 (TAMAKI, SUGURU)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：40432413

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：実用的な最適化問題の多くは、NP困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。本研究では、これらの計算困難問題に対する高速な厳密アルゴリズムの設計とその計算量の解析を行った。結果として、論理回路の充足可能性問題、和積形論理式の最大充足可能性問題に対する高速なアルゴリズムを得ることができた。また、最小直線配置問題に対する劣指数時間アルゴリズム、制約充足可能性問題に対する頑健なアルゴリズムも与えた。

研究成果の概要(英文)：Many practical optimization problems are known to be NP-hard, which is the class of computationally intractable problems. In this study, we gave design and complexity analysis of efficient exact algorithms for such computationally difficult problems. As a result, we obtained improved algorithms for the satisfiability problems of Boolean circuits and the CNF maximum satisfiability problem. We also gave subexponential time algorithms for the minimum arrangement problem and robust algorithms for the constraint satisfaction problems.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：計算量理論 アルゴリズム論 充足可能性問題 制約充足問題 論理回路 グラフ

1. 研究開始当初の背景

社会システムや産業活動などに関連して現れる生産計画、配置計画、スケジューリング、自動設計などを始めとする重要な問題の多くは、NP 困難と呼ばれる計算困難なクラスに属している。これらの問題に対する既知の厳密アルゴリズムは、全て指数時間アルゴリズムであり、実用上の観点からは使用に耐えないことが多かった。そのため、最適解を求めることを保証しないヒューリスティックや、ある程度最適解に近い実行可能解を求める近似アルゴリズムを用いることが主流となっていた。

しかし、計算機の高速化により、実用的な問題に対して指数時間アルゴリズムを適用することも可能となってきている。例えば、集積回路の分野において、論理式の充足可能性問題の厳密解を求めることにより、大規模回路の自動設計に成功している。このような状況を反映して、より高速な厳密指数時間アルゴリズムの設計とその性能解析がますます重要となっている。

近年、アルゴリズム分野でトップレベルの国際会議・学術誌において、厳密アルゴリズム関連の論文発表件数が劇的に増加している。新たな問題に対する厳密アルゴリズムの設計と解析、既存のアルゴリズムに対する改良の結果が次々と生まれ、活況を迎えている。特に、理論計算機科学分野では最高の国際会議・学術誌とされる STOC, FOCS, JACM に厳密アルゴリズムの論文が頻繁に採録され、厳密指数時間アルゴリズムのみを扱った専門書が Springer 社から出版されるなど、アルゴリズムの一大分野として国内外で大きな注目を集めている状況といってもよい。

厳密アルゴリズム分野は、専門書が出版されるまでになるなど、創成期から成熟期へと移行しつつある。しかしながら、重要な未解決問題は多数残されており、実用面・理論面双方からいっそうの発展が強く期待されている研究対象である。

2. 研究の目的

本課題では、計算困難問題に対する高速な厳密アルゴリズムの設計とその計算量の解析を目的とする。現在最高速の厳密アルゴリズムの典型的な計算時間は c の n 乗 (c は 1 より大きい定数) と入力サイズ n について指数時間となっている。この指数 c の値をできるだけ小さくすることが目標となる。重みつき分割統治法、計算機を援用した詳細な場合分け、乱択アルゴリズム、固定パラメータ解析など近年発展した手法をさらに発展、改良させ新たな設計・解析手法を確立する。以下の 2 種類の目標を設定する。

・一定の成果が見込める目標

- (1) 個々の問題に対するアルゴリズムの設計・計算時間改良
- (2) 指数領域を使用するアルゴリズムの計算

領域削減

(3) 設計したアルゴリズムの実用問題への適用、計算機実験評価

・挑戦的な目標

- (4) 広範な問題に適用可能なアルゴリズム設計・解析の手法開発
- (5) 場合分けを多数含むアルゴリズムの単純化
- (6) 計算時間の下界解析

3. 研究の方法

本研究は理論的研究を主体とするため、アイデアが出ない場合に研究が停滞する恐れもある。このような場合、最も有用な打開策は他の研究者との交流である。分野全体をよく知る研究者のアドバイスを求め、研究の方向性を再確認することや、特定の手法に長けた研究者との共同研究を図ることが、打破につながる。交流の機会を多く持つために、国内外の研究会への参加や学術誌における研究成果発表を積極的に行っていく。

アルゴリズム論や計算量理論の国際会議・スクール形式のワークショップ等に参加することで、あらたなアイデアや解析手法の習得に努めることも有用である。所属研究室のセミナーの機会なども併用して、最新の論文の調査と専門的な教科書の学習も積極的に行う。また、理論的考察のみならず、計算機実験を積極的に用いることで、数式では容易に導出できない性質を見出し、これに理論的解析を試みることも重要である。

4. 研究成果

- (1) 2 変数完全基底上の論理式に対する SAT アルゴリズムと平均計算量の下界
[雑誌論文]

論理式は素子のファンアウト数が 1 であるような論理回路のことである。言い換えれば、回路の形状が木となっているような論理回路のことである。一般の論理式は、和積形論理式・積和形論理式や定数段数回路を効率よく表現することが可能である。そのため、論理式の充足可能性判定（与えられた論理式が 1 を出力するような入力ベクトルが存在するか？）を非自明な計算時間で行うことは困難である。Santhanam は素子の種類が and, or, not であるような論理式に対し、その素子数が入力変数の数 n に対して線形である場合に、非自明な充足可能性判定アルゴリズムを与えた。アルゴリズムは非常に簡潔であるが、その解析は離散数学の華麗な方法にもとづいている。

本研究では、回路で使用できる素子として、任意の 2 変数論理関数を許した論理式に対し、充足可能性を非自明な計算時間で判定する

厳密指数時間アルゴリズムを与えた。アイデアは、Santhanam のアルゴリズムの単純な拡張ではうまくいかない場合を、代数的な方法により回避したことである。さらに、応用として、線形サイズの論理式がある明示的な関数を近似することが困難であることを示した。

(2) 線形サイズ和積標準形論理式の最大充足問題に対する指数時間アルゴリズム
[学会発表]

本研究では、節の数が変数の数の高々定数倍である和積標準形論理式の最大充足問題に対する指数時間多項式領域の厳密アルゴリズムを与えた。このアルゴリズムは自明な計算時間である 2^n の n 乗より指数的に高速に動作する。また、既存の最速アルゴリズムが指数領域を必要としたのに対し、我々のアルゴリズムは多項式領域しか使用しない。さらに、既存のアルゴリズムが扱うことができなかったいくつかの特性を持つ。

(i) 実数の重みが付いた例題を扱うことが可能、

(ii) ハード制約と呼ばれる必ず満たすべき制約を扱うことが可能、

(iii) 最適解の個数およびある閾値以上を達成する解の個数を数え上げることが可能。

アルゴリズムの設計には、「幅削減」「貪欲制約」と呼ばれる技法を用いており、その解析は回路計算量の研究に触発されたものである。

(3) 最小直線配置問題に対する高階固有値による近似アルゴリズム
[学会発表]

n 頂点をもつ無向グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき、その直線配置とはそれぞれの頂点に $1 \sim n$ の数字 (ラベル) を割り当てることである。ただし、異なる頂点は異なる数字を割り当てられなければならない。

直線配置における枝 $e=(u,v)$ のコストは、 u のラベルと v のラベルの差の絶対値のことである。直線配置のコストは、全ての枝のコストの和として定義される。最小直線配置問題では、コストが最小である直線配置を求めることが要求される。最適解を求めることは計算困難 (NP 困難) であるため、多項式時間近似アルゴリズムの研究が盛んに行われている。現在最もよいアルゴリズムの近似比率は $O((\log n)^{(1/2)})$ である。

本研究では、グラフの正規化されたラプシアン固有値に着目し、 k 番目に小さい固有値が非負定数であれば、定数の近似比率を達成するアルゴリズムを与えた。アルゴリズムの計算時間は $O(n^{O(k)})$ である。アルゴリズムの正しさの解析は、最先端のスペクトラルグラフ理論を用いている。

(4) 線形計画法による幅 1 の制約充足問題に対する頑健なアルゴリズム

[学会発表]

最大制約充足問題とは、充足される制約の数を最大化する割当てを求める最適化問題である。頑健なアルゴリズムは、ほとんど全て (例えば 99 パーセント) の制約を充足できるような例題に対し最適解に近い (例えば 98 パーセント充足する) 割当てを出力する。本研究では、幅 1 の制約充足問題という広汎な制約充足問題のクラスに対し、線形計画法による頑健なアルゴリズムを与えた。また、ある種の線形計画法により頑健なアルゴリズムを構築できることと、制約充足問題が幅 1 という性質を満たすことが同値であることを示した。

(5) 閾値素子を含む回路の部分クラスに対する圧縮アルゴリズム

[未公表]

回路クラス C に対する圧縮アルゴリズムとは、 C に含まれる回路によって計算される n 変数論理関数 f の真理値表が入力として与えられたとき、サイズが $2^n/n$ 未満であるような f を計算する回路を出力する、計算時間が 2^n の多項式である決定性アルゴリズムである。本結果では回路クラス C として定数段数閾値素子回路 TC_0 の部分クラスを対象として圧縮アルゴリズムを設計した。具体的には $THR*AC_0$ と $AND*THR$ と呼ばれる回路クラスを扱い、圧縮アルゴリズムを与えることに成功した。

(6) 2 段 $AC_0[p]$ 回路に対する SAT アルゴリズム

[未公表]

2 段 $AC_0[p]$ 回路とは、and, or, mod p , not の 4 種類の素子からなる 2 段の論理回路である (ただし各素子のファンインとファンアウトは無制限)。2 段 $AC_0[p]$ は CNF 及び DNF の拡張であり、有限体の上で定義された多項式を表現することもできる。2 段 $AC_0[p]$ 回路に対する非自明な最悪計算時間量を持つ SAT アルゴリズムとしては、Williams による指数領域を使うものが知られている。(Williams の結果はより広い ACC_0 と呼ばれる回路を扱えることに注意。) 本研究では、多項式領域しか用いない非自明な SAT アルゴリズムを与えることに成功した。アイデアは、CNF に対する SAT アルゴリズムの技法と疎な多項式の等価性判定アルゴリズムの技法をうまく組み合わせるといふものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計5件)

Suguru Tamaki, Yuichi Yoshida. A Query Efficient Non-Adaptive Long Code Test with Perfect Completeness. Random Structures & Algorithms, to appear. 査読有

Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. Derandomizing the HSSW Algorithm for 3-SAT. Algorithmica, 67(2):112-124, 2013. 査読有

Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki. A satisfiability algorithm and average-case hardness for formulas over the full binary basis. Computational Complexity, 22(2):245-274, 2013. 査読有

Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. An exact algorithm for the Boolean connectivity problem for k-CNF. Theor. Comput. Sci., 412(35):4613-4618, 2011. 査読有

〔学会発表〕(計15件)

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto and Suguru Tamaki. Solving Sparse Instances of Max SAT via Width Reduction and Greedy Restriction. In Proceedings of the 17th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT), 2014, to appear. 査読有

Suguru Tamaki, Yuichi Yoshida. Approximation Guarantees for the Minimum Linear Arrangement Problem by Higher Eigenvalues. In Proceedings of the 15th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX), pages 313-324, 2012. 査読有

Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki. A Satisfiability Algorithm and Average-Case Hardness for Formulas over the Full Binary Basis. In Proceedings of the 27th IEEE Conference on Computational Complexity (CCC), pages 107-116, 2012. 査読有

Gábor Kun, Ryan O'Donnell, Suguru Tamaki, Yuichi Yoshida, Yuan Zhou. Linear programming, width-1 CSPs, and robust satisfaction. In Proceedings of the 3rd Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS), pages 484-495, 2012. 査読有

Kazuhisa Makino, Suguru Tamaki, Masaki Yamamoto. Derandomizing HSSW Algorithm for 3-SAT. In Proceedings of the 17th Annual International Computing and

Combinatorics Conference (COCOON), pages 1-12, 2011. 査読有

Suguru Tamaki. The complexity of robust satisfiability of the constraint satisfaction problem. Dagstuhl Seminar 14201, Saarland, Germany, 2014. 招待講演

Suguru Tamaki. A satisfiability algorithm and average-case hardness for formulas over the full binary basis. Dagstuhl Seminar 13331, Saarland, Germany, 2013. 招待講演

Takayuki Sakai, Kazuhisa Seto, Suguru Tamaki. Solving Sparse Instances of Max SAT via Width Reduction and Greedy Restriction. The 7th AAAC Annual Meeting, Hangzhou, China, 2014.

Suguru Tamaki. The complexity of robust satisfiability of the constraint satisfaction problem. The 6th AAAC Annual Meeting, Matsushima, Japan, 2013.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~tamak/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

玉置 卓 (TAMAKI SUGURU)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：40432413