様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７００２６２

研究課題名（和文）n次モーメントによる情報の表現・伝達・復元

研究課題名（英文）Signal representation, transmission, and recovery using the n-th order moments

研究代表者
寺園　泰（Terazono, Yasushi）

東京大学・情報理工学（系）研究科・研究員

研究者番号：９０４３５７８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：n次モーメントを利用した劣決定信号復元の方法や，その基礎となる最適化問題の性質を検討した．
信号復元では，ソースの疎性と独立性を仮定して２次モーメントを非線形推定し，その結果を用いてさらに各サンプルのソースの生の値を非線形推定する方法を構築した．観測次元を超える数の活動を捉えることに成功した．
最適化問題では，復元手法の設計可能性と設計限界の解明に寄与する2つの定理を証明した．一つは Berge の最大値の定理から，制約条件のコンパクト性を仮定しない定理，もう一つはBergeの逆である小宮の定理から，目的関数の入力引数を減じた定理である．これらはより実際の信号復元問題の状況に近い．

研究成果の概要（英文）：Signal recovery methods for underdetermined problems using n-th order moments were developed, and the characteristics of optimization problems which are bases of such signal recovery problems were considered.
In the developed signal recovery method, second order moment of sources are estimated with a non-linear method, and then raw values of source of each observed samples are further estimated with non-linear methods using the derived second order moment estimation. The activities of sources whose active variables are more than observation dimension were successfully captured by the proposed method.
Regarding theories of optimization problems, a variant of the Berge's maximum theorem was developed to handle non-compact-valued constraint conditions. For Komiya's theorem, the inverse of the Berge's theorem, a variant in which the objective function does not take observations as the constraint condition was developed. These theorems correspond to more realistic signal recovery conditions.

研究分野：逆問題

キーワード：モーメント　独立　疎　逆問題　過完備　劣決定　最適解関数　連続

１．研究開始当初の背景

自然界の信号を取り扱うために様々な特徴量が計算されているが，特によく利用されるのがモーメントである．例えば人はテクスチャの判別にモーメントを利用していることが先行研究により示唆されており，すでによく知られた概念である一方で，モーメントを利用した新規の信号処理等の方法が開発できる余地は十分にある．こうした手法の開発は，信号におけるモーメントの特徴という性質面の解明に寄与するとともに，信号処理の実用面にも貢献し得るものである．
また，信号復元において現れるような逆問題では，信号復元の逆問題を最適化問題として定式化することが行われる．そのため，この最適化問題における条件と最適解の関係性を明らかにしていくことは，手法開発のための理論的基盤の確立の面で意義が大きい．

２．研究の目的

統計量である n 次モーメントを利用した，信号の表現や圧縮・復元法を探ることで，各用途に対してより有効なモーメントの利用法を検討し，可能ならモーメントを利用した新しい信号復元手法などを開発するとともに，現れる最適化問題について理論的検討を加える．

３．研究の方法

3.1 ２次モーメントを利用した overcomplete 信号復元

観測信号が，源信号に対して線形に与えられ，しかも源信号より変数の数が少ない場合を考える．例えば，5 人の話者の音声を 3 本のマイクで観測するような場合である．このような状況を劣決定 underdetermined，または同じ意味で過完備 overcomplete という．この観測過程は，観測信号を y，伝達特性を A，源信号を x として，y=Ax と表せる．ここでは，A は既知である場合を考える．
overcomplete である場合，y と A が与えられたとしても，x は一意には決まらない．この場合に x を決める基準・方法は数多くあり，解析者の判断により選択される．
今回，overcomplete 問題への推定解を求める方法を構築するために，1）信号の２次モーメント，2）ソース間の独立性，3）ソースのスパース性 を利用することを試みた．2 次モーメントでは，各時点のサンプルよりも，実質的な観測変数数が多くなる．すなわち，観測次元を M とすると，各サンプルの観測変数数は M，２次モーメントの観測変数数は M(M+1)/2 と考えられる．これを利用して，観測次元 M より多いアクティブソース数であっても， M(M+1)/2 より少なくかつソース間が独立であれば，ソースの２次モーメントに関しては復元できる可能性がある．そこで，この復元法を検討した．
また，得られたソースの２次モーメントの推定を利用し，各観測信号サンプルからの各源信号サンプルの推定を改善することを試みた．そのために，スパース解をもたらせる非線形解法を用いることで，推定された源信号時系列の２次モーメントが，より強い対角性を持つよう図った．

3.2 目的関数と最適解関数の関係に関する２つの定理

信号復元の逆問題を最適化問題として定式化した場合の条件と最適解の関係性については，Berge の最大値の定理と，小宮によるその逆定理が知られている．
Berge の最大値の定理では，最適化の目的関数が連続，制約条件はコンパクト値かつ凸値という条件（他にも条件有）を仮定し，最大値関数（最適値関数）の連続性，最大値点多価写像（最適解関数）の上半連続性が示される．
一方，信号復元の問題では，制約条件はコンパクト値とは限らない．とくに，音声や電磁気信号を対象とする系では，多くは線形である伝達特性に対応して制約条件はアフィン部分空間となり，コンパクトでない．そのため，Berge の最大値の定理の類縁的な定理を，コンパクト値でない可能解に対して求めることを試みた．
次に，小宮による Berge の定理の逆定理は，与えられた多価写像が最適解関数になるような最適化問題，特に目的関数を求められるかに関する定理である．これは，実現したい復元法（最適解関数）が，実際に実現可能か（目的関数の存在）に関する主張であると言える．小宮の定理では，目的関数が，given の制約に関するパラメータと，操作変数となる解のパラメータを両方入力引数として取る場合について，上半連続な最適解関数が，準凸の目的関数により実現できることが示されている．
一方，信号復元の問題では，最適化問題の立式の由来上，目的関数は given の制約に関するパラメータを入力引数として取らないことも多い．例えば，解のパラメータに事前確率分布を仮定して，最尤推定ないし事後確率最大化により解くような場合である．そこで，制約条件をアフィン部分空間に限定し，制約パラメータなしの目的関数を用いる場合を検討した．特に，どのような種類の連続性を持つ最適解関数が，凸な目的関数により実現できるかを検討した．

４．研究成果

4.1 ２次モーメントを利用した overcomplete 信号復元

overcomplete な線形観測系で，ソースの２次モーメントを推定し，またそれを利用してソースの各サンプルの推定を改善する手法の枠組みを構築した（未発表成果）．方法は以下の通りである．

1. ソースの２次モーメント Cxを推定する．観測 y の共分散行列を Cy，ソース x の共分散行列を Cx とすると，Cy=A*Cx*A’の関係がある．いま，ソースが互いに独立とすると，Cx は対角行列である．その対角成分を並べたベクトルを dx とおくと，A に由来する係数行列 B を用いて Cy=B*dx が成立する．そこで，dx に非負制約を課し, dx の l1 ノルムを最小化することで, dx の推定を得る．これにより Cx の推定は Cx=diag(dx) で得られる．

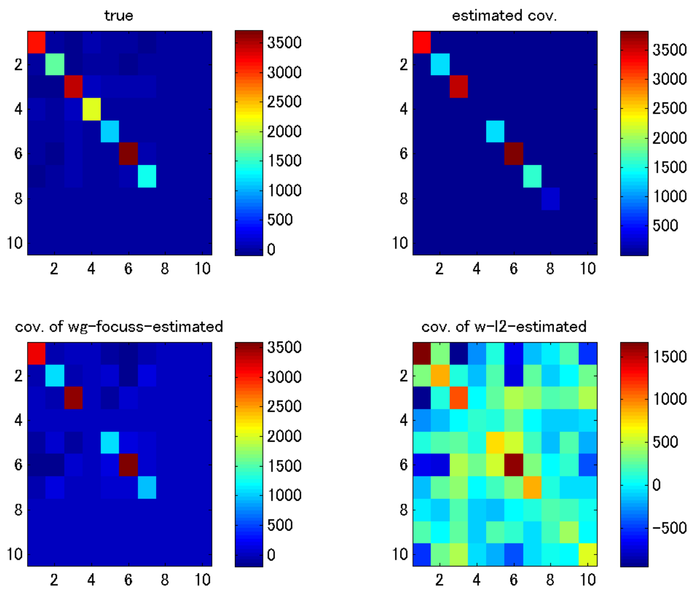

図 1. overcomplete な信号復元の様子．多チャネルの時系列の共分散行列（２次モーメント）を色変調で示した．左上：真のソース．10 成分中 7 成分が有意に活動．右上：提案法で推定した２次モーメント．左下：提案法で推定した２次モーメントを用い，さらに提案法で各サンプルについて推定したソースの共分散．右下：線形に推定された２次モーメントを用い，各サンプルについて線形推定を行ったソースの共分散．

2. 得られたソースの２次モーメントの推定(ここではそれも Cx と書く)を利用して，ソースの各サンプルを非線形推定する．線形推定であれば，共分散行列 Cx が与えられた下での y=A*x に対する x の推定 xe は，xe＝Cx*A’*(A*Cx*A’)^(-1) で得られる．ここでは各時点でさらにスパースな解を与える非線形の方法をとる．スパース解法として知られる FOCUSS のバリエーションのうち，事前重みを常に適用する方法を用い，事前重みに Cx を使う．各サンプルに対しては，一般に非零要素が M 個以下の推定解が求まる．

提案手法の適用例を図１に示す．観測次元を 5 次元，ソース変数を 10 次元，アクティブソースを 7 とし，アクティブ変数は各々分散の異なる平均 0 の正規分布に従い独立に発生させた．左上の真のソースの２次モーメントに対し，推定された２次モーメントの様子を右上，左下，右下に示した．右上は２次モーメント自体を提案法により非線形に l1 ノルム最小化で推定したもの．真の２次モーメントにある程度近い推定が得られている．左下は，その推定結果を利用して各サンプルについて提案法で非線形ソース推定を行い，その結果の２次モーメントを求めたもの．依然として真のソースの２次モーメントに近いイメージの結果が得られている．右下は，まず２次モーメントを線形推定し，その結果を利用して各サンプルのソースを線形推定し，得られた結果の２次モーメント．手法全体としては非線形になるものの，提案法と違って真のソースの２次モーメントと大分様相の異なる推定になってしまっている．本結果は一例であって，さらなる系統だった検討が待たれるものの，２次モーメントの非線形推定と，その結果を利用した各サンプルでのソース推定の有効性が示唆される．

特に，推定に現れているアクティブソース数(6～7 個)が，観測次元(5)よりも大きいという設定の下で有効な推定が得られた点に注目されたい．これは，２次モーメントを援用した本手法に特徴的な点である．

4.2 目的関数と最適解関数の関係に関する２つの定理

信号復元の逆問題を最適化問題として定式化した場合の条件と最適解の関係性について，以下の二つの定理を証明した（投稿中）．これら二つの定理により，ある種の安定性を持つ信号復元法の設計法，及び設計限界（他の性能との両立の可否）について，一定の基礎づけを行うことが出来た．

定理１．最適化問題

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{minimize}_{\boldsymbol{x}} & s\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right), \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in C\left(\boldsymbol{y}\right), \end{array}\right.$$

を考える．ただし x は N 次元実数空間，y は M 次元実数空間の元とする． C は集合値写像で，閉値，凸値，連続であるとする．s は二

つの引数 x,y の属する直積空間上で連続で，y を固定した時，x について準凸とする．このとき，もし最適解関数 C^*

$$C^*(y) = \{x \in C(y) \mid s(x,y) = s^*(y)\}.$$

が非空値で有限値になるならば，C^*は同時に凸値，コンパクト値，上半連続になり，また s^*は連続となる．s^*は最適値関数

$$s^*(y) = \min_{x} \{s(x,y) \mid x \in C(y)\},$$

である．

この定理の主旨は，目的関数 s が準凸であれば，その他補助的条件の下で，最適解関数がある種の連続性を持つということである．この連続性とは，信号復元問題で言えば，与えられた観測が微小に変化した際，復元される信号側も変化は微小であることを意味する．もしこうした連続性が成り立たないなら，外乱等で常に値が摂動することが想定される観測信号に対し，復元される信号は，観測の摂動に過剰反応し，飛び飛びで不安定なものになりうる．復元問題，逆問題においては，解の安定性は主要な目標の一つであり，それが保証される状況の一つを明らかにしたのが本定理である．

定理２．観測 y(M 次元実数)がソース x(N 次元実数)に対し 線形に y=Lx で与えられるとする．なお，N>M，rank(L)=M とする．ある写像 g:Y->X が，Lg(Lx)=Lx を満たすとする（ここで，このような g を L の一般化逆写像と呼ぶ)．このとき，もし g が C^2 級の関数で，二階微分係数が有界なら，凸かつ連続な関数 s:R^N->R で

$$g(y) = \operatorname*{argmin}_{x} \{s(x) \mid Lx = y\}.$$

となるものが存在する．

この定理の主旨は，ある種の連続性（滑らかさ）を持つ信号復元法(ここでは一般化逆写像 g)は，凸かつ連続という最適化しやすい目的関数によって実現できるという点にある．この事実が与えられたことにより，「上記連続性を持ち，かつ○○」という性能を持つ復元法を設計できるかどうかは，凸かつ連続な目的関数のうち，○○という性能も実現できるものが存在するかどうか，という問題に置き換えて検討することが出来る．もし存在しなかった場合，最適化しにくいクラスの関数から目的関数を探す必要はなく，単にどんな目的関数でも実現不可能だと言い切れるようになったのである．

この定理の将来の発展としては，今回実現された「二階微分係数が有界」というクラスをより拡大し，C^2 級の一般化逆写像全体が凸かつ連続な目的関数で実現できるか，制約条件を線形でなくした場合にどうなるか，を検討していくことが挙げられる．特に，定理１とより対称性の良い形の定理が得られれば，目的関数（設計）と最適解関数（復元法）の本質的関係により迫ることが出来よう．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）
〔学会発表〕（計０件）
〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

６．研究組織

(1)研究代表者

寺園　泰（TERAZONO，Yasushi）
東京大学・大学院情報理工学系研究科・特任研究員
　研究者番号：90435785