

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：13501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23700953

研究課題名(和文) 数学的モデル化の能力と態度の育成に関する研究

研究課題名(英文) Teaching and learning of mathematical modeling: Fostering of mathematical modeling abilities and attitudes

研究代表者

清野 辰彦 (SEINO, Tatsuhiko)

山梨大学・教育学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00550740

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、数学的モデル化能力と態度を明確にするとともに、数学的モデル化能力と態度を育成するための学習指導を構築することであった。数学的モデル化能力については、定式化、数学的処理、解釈・評価の各局面を遂行するのに必要な能力と数学的モデル化過程全体をモニタリングし、コントロールする能力の2つの柱で規定した。

また、学習指導については、1つの事象に対して、経験的モデル化と理論的モデル化の双方を意識させる学習指導と実験データや統計データの回帰分析を行う際に重要となる最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導を具体例とともに示した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study was to clarify mathematical modeling abilities and attitudes, and to build teaching and learning of mathematical modeling to foster them.

Mathematical modeling abilities was defined by abilities to control and monitor the entire mathematical modeling process and abilities required to perform formulation, mathematical processing, and interpretation and evaluation.

I investigated teaching and learning to foster abilities and attitudes of mathematical modeling. The first is teaching and learning of empirical modeling and theoretical modeling. The other is teaching and learning of the fundamental thinking of a least-squares method.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学・科学教育

キーワード：数学教育 数学的モデル化

1. 研究開始当初の背景

近年の数学教育界では、日常事象や自然現象等の「生のデータ」を用いた教材を扱い、数学的モデル化過程の実際を授業の中で展開するという学習指導が進められてきた。我が国の生徒たちは、「数学は役立つ」といった認識を抱いているとともに、数学の知識・技能・考え方を現実の世界に対して活用する能力に課題があることが明らかにされたからである。だが、これまでの授業は、1時間あるいは数時間の授業であり、中長期的な視野に立ち、数学的モデル化の能力や態度を育成しようとしたものではなかった。数学的モデル化の能力や態度は、断片的な授業によって、容易に育成できるものではない。綿密な計画に基づき、授業を行い、その授業を通して、どのような考えをしたのか、どのような事柄に困難性を抱いたのか、変容したことは何か等を丁寧に分析し、それを授業に活かすというサイクリックな過程を長い時間に渡って行うことによって、育成できるものである。しかしながら、上記を意図した授業を行っていくためには、数学的モデル化の能力や態度を明確にするとともに、その育成に向けた学習指導を構築する必要があるが、まだ不明確な状態が続いている。

本研究課題は、こうした問題意識を背景に、数学的モデル化の能力と態度の育成に向けて展開する研究である。

2. 研究の目的

中長期的な視野に立ちながら、数学的モデル化の能力と態度を育成し、そして評価していくためには、数学的モデル化の能力の同定並びにその学習指導に関する基礎的な研究が必要かつ重要となる。そこで、本研究では、数学的モデル化の能力と態度を明確にするとともに、数学的モデル化の能力と態度を育成するための学習指導を構築することを目的とする。

3. 研究の方法

研究目的を達成するために、次の四つの課題を設定した。第一の課題は、先行研究における数学的モデル化の能力について考察し、本研究における数学的モデル化の能力を明確にすることである。第二の課題は、数学的モデル化の能力と態度を育成するための学習指導について考察することである。第三の課題は、テクノロジーの使用を前提としたとき、数学的モデル化の能力と態度を育成するための学習指導について考察することである。第四の課題は、数学的モデル化の能力と態度の育成を目指した授業を実際に行い、構築した学習指導が有効に機能しうるかどうかを検討することである。

本研究では、第一の課題から第三の課題までの解決は、主として先行研究の文献解釈による理論的考察を研究方法とし、第四の課題の解決は、授業のプロトコル、生徒の解決過

程が記述されているノート及び生徒の学習感想の分析による実証的考察を研究方法とした。

4. 研究成果

以下では、本研究の主たる知見を4つに分けて記述する。

(1) 数学的モデル化の能力の明確化

数学的モデル化の能力の概念規定を行うにあたって、定式化や数学的処理などの各局面を遂行するのに必要な能力と数学的モデル化過程全体をモニタリングし、コントロールする能力の2つの柱で規定した。具体的には、以下の枠組みを作成した。

局面	能力	
A ・ 定式化	A1. 事象の構成要素の特定	A1-1. 構成要素の生成 A1-2. 構成要素の選択 A1-3. 変量と定量の区別
	A2. 問の特定	
	A3. 構成要素間の関係の設定	A3-1. 構成要素間の関係の生成 A3-2. 構成要素間の関係の選択
	A4. 仮定の設定	A4-1. 構成要素を単純化・理想化する仮定の設定 A4-2. 数値に関する仮定の設定
B ・ 数学的処理	B1. 数学的記号・表現の使用	B1-1. 数学的記号・表現の理解 B1-2. 異なる数学的表現への変換
	B2. 数学的原理・法則・手法を用いた数学的処理	B2-1. 数学的原理・法則・手法の理解 B2-2. 数学的原理・法則・手法の使用
C ・ 解釈・評価	C1. 結果の解釈	C1-1. 数学的結果の解釈 C1-2. 数学的モデルの解釈
	C2. 結果の評価	C2-1. 数学的モデルの検証 C2-2. 数学的モデルの改良 C2-3. 数学的モデルの限界の明確化
D 全体	D1. 数学的モデル化過程に対するメタ知識の理解	
	D2. 数学的モデル化過程のモニタリング・コントロール	

また、態度については、西村(2012)が述べている態度を参照し、「批判的な態度」、「応用的な態度」、「発展的な態度」を数学的モデル化の態度とした。

(2) 経験的モデル化と理論的モデル化の双方を意識した学習指導の構築

経験的モデル化と理論的モデル化の双方を経験できる教材とその教育的価値

経験的モデル化とは、実験・実測によって得たデータや統計データの観察を通して作

成したモデルを基に、また、座標平面上に描いたデータに対して適合するグラフを作成し、そのグラフを基に、事象を理解、記述、予測、判断する過程である。また、経験的モデル化では、データが主導的な役割を果たしているため、モデルの適用範囲の限界を意識し、データをより注意深く解釈することが重要である。

一方、理論的モデル化とは、事象の重要な構成要素を特定、記述し、構成要素や構成要素間の関係に関する仮定を設定する。そして、それらを文字や図形を用いて表現し、処理や作業によって得られたモデルを基に、事象を理解、記述、予測、判断する過程である。また、理論的モデル化では、データは主として、モデルの妥当性の評価を行う際に用いられる。現代社会では、問題を解決する目的やそこで使用可能な手段、有効な手段を考慮に入れ、経験的モデル化と理論的モデル化が、適切に用いられている。この2つの活動を遂行できる能力は、事象を数理的に考察する能力を細分化した能力に該当し、これからの社会をより豊かに生きていくために生徒に身につけさせたい重要な能力になると考える。その能力を育成するためには、生徒自らが双方の活動を行い、問題を解決する経験を積むとともに、価値を感じることが欠かせない。

そこで、経験的モデル化と理論的モデル化の双方を経験できる教材の開発を行った。1つ目の教材は、制動距離と制動初速度との関係を考察する「スリップ痕の問題」である。制動初速度と制動距離の実際のデータから、「制動距離は制動初速度の2乗に比例する」という関係を見出し、その数学的モデルをつくる活動ができる問題となっている。2つ目の教材は、プロジェクターによって映し出される映像の横幅とスクリーンからプロジェクターまでの距離との関係を考察する「プロジェクターの問題」である。映像の横幅とプロジェクターまでの距離の実際のデータから、「距離と横幅は比例する」という関係を見出し、その数学的モデルをつくる活動ができる問題となっている。

また、開発した教材に照らし合わせながら、1つの事象を経験的モデル化と理論的モデル化の双方から考察することの教育的価値について考察した。具体的には、次の4点を挙げた。1点目は、自立心の育成である。2点目は、事象を数理的に考察する方法の獲得である。3点目は、双方から考察したプロセスを対比させることにより、仮定がより顕著に意識化され、仮定の役割の理解が促進される点である。4点目は、事象のより深い理解につながる点である。

経験的モデル化と理論的モデル化の双方を意識した学習指導

授業ではまず、現実事象の問題の提示が行われる。現実事象の問題は、様々な要素が複雑に絡み合っているため、事象に対して数学

を活用するためには、まず様々な側面の捨象や単純化および理想化等を行い、事象の構成要素を特定する必要がある。授業では、この議論から行う（事象の構成要素の特定の段階）。そして、問題の前提を構成していくのである。その際には、問題を解決するために、どのような構成要素を取り上げるべきかを問うとともに、捨象している構成要素を明確にする。また、取り上げた構成要素のうち、何を変数（変量）とし、何を定数（定量）とするのかを問い、定数（定量）として考えたものには、数値を与えるのである。さらに、取り上げた構成要素をどのように理想化・単純化するのかも議論される。

構成要素が特定された後は、自力解決へと進んでいく。自力解決後、生徒によって、解決に至った解法の発表が行われる。生徒たちの解法は、どのような仮定に基づいて問題を解決しているのかが必ずしも明確ではなく、仮定が意識の下に埋没している場合が多いからである。

発表後は、解法の比較・検討を行う（解法の比較・検討の段階）。その際、どのような仮定を基に、解決を行ったのかを明確にするための議論を行う。議論の際、行うべきことは、生徒の解法を仮定に着眼して、整理することである。つまり、各解法を独立にしておくのではなく、各解法の中では、どのような仮定が設定されているのかを生徒に問い、共通な仮定があれば、その整理を促すのである。整理することによって、仮定がより一層顕在化されるとともに、解法の中に異なる仮定が設定されていることも顕在化される。また、異なる仮定の顕在化は、次の解釈・評価の段階において、どちらの仮定がより現実事象の問題解決にとって、妥当な仮定であるかを議論する源となる。

授業ではこの後、解釈・評価の段階へと移る（数学的結論の解釈・評価の段階）。すなわち、得られた数学的結論を現実事象と照合し、数学的結論の適切性や妥当性を吟味するのである。その際、設定した仮定を再度意識化させ、得られた数学的結論と関連させながら吟味する。数学的結論が現実事象と適合しているかどうかといった表面的な判断だけでなく、その背後にある仮定に着眼させ、問題解決のプロセスを評価させることが必要である。

解釈・評価の段階を終えると、次は、より良いモデル化の段階へと移行する（より良いモデル化の段階）。その際、まず単純化、特殊化されている状況は何かを問い、（暗黙裡に）設定されている仮定をできる限り明らかにし、問題解決を支えている前提を明確にする。次に、より現実事象を反映した数学的モデルや一般性のある数学的モデルを作成させるために、どのような仮定を修正するか、また、どのような構成要素を新たに付け加えるべきかを問う。そして、仮定の修正や構成要素の追加によって得られた新たな数学的

モデルの吟味を行うのである。上記の学習指導は、経験的モデル化と理論的モデル化の双方において行う。

(3) 最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導

現代社会には、膨大な量のデータが、散在している。散在しているデータに翻弄されるのではなく、上手に活用して適切な判断ができる能力の育成が、今、数学教育に求められている。この能力を育成していくにあたって、グラフ関数電卓や表計算ソフト等の「テクノロジー」の活用は必要かつ重要になってくる。

だが、「テクノロジー」を学習指導に位置づけていった場合、新たに考えなければならぬ問題も出てくる。その1つが、回帰直線を求める方法として、どのような方法をどの程度まで授業において扱うのかという問題である。「テクノロジー」を用いて回帰直線を求める場合、一般的に用いられている方法が、最小二乗法による方法である。この方法は、回帰曲線を求める際にも用いることができるため、汎用性が高く、有力な方法である。だが、一方で、最小二乗法は容易ではない。そのため、最小二乗法による回帰直線を引いた後、その方法に踏み込んで学習することは少ない。最小二乗法について、「ブラックボックス」のままにするのではなく、基本的な考え方の理解を目指した学習指導をする必要がある。

こうした問題意識を背景に、先行研究の考察を踏まえ、最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導として、以下の3点を柱として、授業を構成した。(ア)  $N$  個のデータに対する回帰直線を考察するのではなく、いくつかのデータに対する回帰直線を考察する。つまり、具体的なデータに対する回帰直線の式を求めることを通して、「残差の二乗の和を最小にする」ことの意味の理解をねらいとする。(イ) 説明変数を  $x$ 、目的変数を  $y$  とした際、最小二乗法による回帰直線が、説明変数のデータの平均値と目的変数のデータの平均値を通るという特徴を見出し活用する。(ウ) 回帰直線は、「残差の二乗の和」が最小になるように、直線を動かしながら求めるのではなく、二次関数の最小値を求める活動を通して求める。つまり、回帰直線が平均値を通るという特徴を基にして、回帰直線の切片を傾きの文字で表現し、二次関数の最小値問題に帰着するのである。また、最小値を求める際には、平方完成を行って求めるとともに、二次関数のグラフを描き、最小値を見出すという二つの方法によって求める。

上記の学習指導を行うための教材として、「プロ野球の問題」を開発し、その学習過程について記述した。また、その教育的価値について次の2点を指摘した。(ア) 最小二乗法による回帰直線は、説明変数のデータの平均値と目的変数のデータの平均値を通ること、並びに全てのデータを対象にしているの

で、1つのはずれ値によって大きな影響を受けることを実感を伴いながら、理解することができる。また、統計にとって平均が重要な役割を果たしていることも、再認識することができる。(イ) 具体的な残差に対して、その二乗の和を最小にする方法の理解が期待できる。また、その過程において、二次関数において学習した最小値を求める方法の有用性を感じ得ることになる。

(4) 数学的モデル化の能力と態度を育成するための学習指導の検討

数学的モデル化能力と態度の育成を目指した授業を実際に行い、構築した学習指導が有効に機能しているかどうかを検討した。具体的には、比例の概念を活用して、現実事象を数理的に考察する際の見方・考え方を獲得するとともに、グラフの有用性を感じ得ることを意図した授業を例に検討した。

今後の課題は、数学モデル化の能力と態度を育成するための学習指導モデルを精緻化することである。また、授業のデータ数を増やし、生徒の数学的モデル化能力や態度の変容を3年間という中長期的な視点から分析することである。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計2件)

清野辰彦, 「最小二乗法の基本的な考え方の理解を目指した学習指導に関する一考察」, 査読有, 日本数学教育学会誌, 95巻9号, 10-18, 2013

清野辰彦, 「学校数学における経験的モデル化と理論的モデル化 - 双方の活動を経験できる教材とその教育的価値」, 査読有, 日本数学教育学会誌, 93巻11号, 2-11, 2011

[学会発表](計1件)

清野辰彦, 「数学の創造と活用を重視した単元に用いる教材の要件や特性」, 年会論文集36, 2012, 107-108, 日本科学教育学会, 東京理科大学

[図書](計1件)

清野辰彦, 東洋館出版社, 「学校数学における数学的モデル化の教材に関する一考察 - 経験的モデル化と理論的モデル化に焦点をあてて - 」『続・新しい算数数学教育の実践をめざして』, 2012, 273-282

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

清野辰彦 (SEINO, Tatsuhiko)  
山梨大学・教育学研究科・准教授  
研究者番号: 00550740

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携協力者

該当なし