

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 1 日現在

機関番号：55402
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2012
課題番号：23710178
研究課題名（和文） 遅延制約のあるサービスシステムの待ち行列モデルを用いた性能解析
研究課題名（英文） Studies on performance analysis of service system with impatient customers
研究代表者 佐久間 大（SAKUMA YUTAKA） 広島商船高等専門学校・流通情報工学科・講師 研究者番号：00434027

研究成果の概要（和文）：本課題では、利用者の待ち時間に制約のあるサービスシステムについて、待ち行列モデルを用いた性能解析を行い、待ち時間制約がシステム性能に及ぼす影響の解明を目的としている。2011年度は主に、待ち行列モデルの漸近解析を行うことにより、利用客のサービスを受け始めるまでの待ち時間分布に対する理論的な近似式を導いた。2012年度は、待ち客の退去率に対するマルコフ的な近似を行うことにより、システム性能の近似的な評価方法を考案した。

研究成果の概要（英文）：In this study, we consider a queueing model in which each waiting customer has a waiting time limit before the beginning of its service. We investigate the impact of the waiting time limits on the performance measures of the queueing model. To this end, we first we obtain the tail asymptotics of the waiting time distributions of served and impatient customers, and then provide an approximation for the waiting time distribution in an analytically tractable form. We next apply a Markovian approximation for the departure process of the impatient customers, and propose an approximation model. Through some simulation experiments, the approximation model is shown to have a good accuracy.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学，社会システム工学・安全システム

キーワード：待ち行列，性能解析，マルコフ連鎖，定常裾確率，漸近解析

1. 研究開始当初の背景

現代社会には多くのサービスシステム（コールセンター，生産システム，情報通信サービスなど）が存在し，その利用者数は増加する一方である．このため，サービスシステムが社会基盤の1つとして果たす役割は大きく，システムが高品質かつ安定したサービスを提供するためにも，システムに対する定量のおよび定性的な性能解析が不可欠である．

ここで，多くのサービスシステムにおける問題点として，利用者がサービスを受けるまでの時間に制約（遅延制約と呼ぶ）があり，システムの混雑によって利用者は満足なサービスを受けられない．例えば，コールセンターのオペレーターに対する長時間の待ちは，利用者の途中離脱を招く．生産システムにおける商品出荷の遅れは，注文のキャンセルまたは商品価値の劣化を招く．通信におけ

る音声・動画などのリアルタイム性を要するパッケージは、タイムアウトにより破棄される。

さらに、システム内の混雑現象はランダムな要因（例えば、利用者行動の不確実性、システムの突如の故障など）により発生することが多く、その正確な予測は難しい。そこで、利用者の遅延制約があるサービスシステムについて、確率モデル（待ち行列モデル）を用いた性能解析を行い、高品質かつ安定したサービスを提供するためのシステム設計および運用に役立てることが期待される。

ここで、各利用者の遅延制約により、遅延制約のある待ち行列モデルは、確率モデルとしての推移構造がシステム状態に依存し、その理論解析だけでなく数値解析は難しいとされる。そこで、数値解析が安定した近似モデルを構築することにより、システムの性能評価に役立てることができる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、利用者の待ち時間に制約のある待ち行列モデルの性能解析を行い、サービスシステムの設計および運用のための理論を構築することである。

一般に遅延制約のある待ち行列モデルを解析するにあたり、各待ち客の到着以降の残余許容時間を追跡しなければならない。そのため、確率モデルとしての推移構造が状態依存であるばかりでなく、状態空間も待ち人数に依存して変化する。そのため、確率モデルの推移構造において、一様な構造を見つけることが難しいことから、性能評価量の定性的特性だけでなく定量的な評価ですら容易ではない。

これまでに解析が進められてきたモデルについての多くは、モデルの確率的仮定について特定の場（待ち時間が定数、到着間隔もしくはサービス時間が指数分布に従う）である下で、システムの性能評価量が導かれている。しかし、現実のサービスシステムへ応用するためには、必ずしも汎用性のある確率的仮定であるとは言い難い。さらに、得られた解析結果から、システム性能の特性が捉えやすいとも言えない。

そこで本研究では、従来の未解決問題に対する解を与えるばかりでなく、新たな解析手法および、近似的であるにせよ実用的な評価方法の考案も目的とする。

主に以下の3点について研究を進める。

(1) システムパラメータが性能評価量に与える影響の理論的解明

利用者の待ち時間分布について、システムパラメータ（例えば、利用客の到着率、サービス窓口の処理能力、窓口数など）を用いた解析的に扱い易い表現による導出を目指す。そのためにも、従来の解析手法の枠にとらわれず新たな方法の開発を目指す。

(2) 数値的に安定した近似評価方法の考案

大規模なサービスシステムに対して、拡散過程による近似解析が考えられる。しかし、拡散過程を用いるためモデルが単純化され、システムの詳細な特性を調べるには十分とは言えない。さらに性能評価量に対する効果的な数値計算アルゴリズムを導くことも難しい。そのためにも、より詳細なシステムの特性を捉えた近似モデルの考案を行い、性能評価量に対する数値計算アルゴリズムの導出を目指す。

(3) 遅延制約のある待ち行列モデルにおける系内数人数分布の導出

先行研究において、遅延制約のある待ち行列モデルの解析は、利用客の仮待ち時間に注目したものが主である。これは、仮待ち時間過程を元にして、遅延制約による待ち客の損失確率が見積もれるばかりでなく、仮待ち時間過程の確率構造が待ち人数過程よりも単純であることが理由として挙げられる。しかしながら、実際のサービスシステムの性能評価を行うためには、待ちスペース容量の問題や待ち人数に注目しなければならない。そのためにも、待ち人数分布の導出を目指した解析方法の考案は、応用上の重要性だけでなく理論的な意義がある。

3. 研究の方法

(1) 遅延制約のある待ち行列モデルの漸近解析

利用客の許容待ち時間が一般分布に従うと仮定した遅延制約のある待ち行列モデルに対して、漸近領域における確率的振る舞いについて理論解析（待ち行列モデルの漸近解析）を行い、システムパラメータの変化がシステム性能に及ぼす影響を明らかにする。従来の研究方法では、許容待ち時間を定数とすることにより、システム内の残余仕事量分布が求められている。しかし、実際の統計データから許容待ち時間が定数であるとは言い難く、モデルとしては応用上十分であるとは言い難い。そこで、待ち行列モデルの漸近解析による新しいアプローチにより、許容待ち時間が一般分布である場合について、システムパラメータの変化が性能評価量に及ぼす影響が明らかにされるばかりでなく、性能評価量の漸近領域における理論的な近似式を導くことができる。

(2) 近似モデルを用いた性能評価

数値的に安定した近似モデルを構築することにより、システム性能の近似評価方法を考案し、実際のサービスシステムへの応用を目指す。一般的な確率的仮定の下、遅延制約のある待ち行列モデルは、確率モデルの推移構造が状態依存であるばかりでなく、システム内の待ち客数に応じて、システム状態の取りうる状態数も変化する。ゆえに、その理論

的のみならず数値的な評価も困難であることが知られている。従来、このような一般的なモデルに対して、拡散過程を用いた近似解法が考えられてきた。しかし、拡散過程は元モデルの挙動を近似的に表現するには単純であり、システム特性を調べるには十分であるとは言い難い。そこで本研究では、モデルを特徴づける一部の確率過程について、推移構造が単純な確率過程による近似を行い、システムの近似的な評価方法を考案する。特にここでは、近似モデルが状態依存型の推移をもつ準出生死滅過程による表現を得ることにより、行列解析法に基づいた性能評価量の数値計算アルゴリズムを導く。

4. 研究成果

(1) 待ち行列モデルの漸近領域における定常的特性の理論解析

単一待ちスペースをもち複数窓口の遅延制約がある待ち行列モデル（ポアソン入力、指数分布に従うサービス、一般許容待ち時間）について、待ち行列モデルの漸近解析を行った。その結果、利用者の待ち時間分布が漸近領域において指数的に減衰し、その減衰率はシステムの総サービス率と利用者1人あたりの途中退去率の和に等しいことが証明された。さらに、この結果を用いて、待ち時間分布に対して、漸近領域における理論的な近似式を導出した。ここで得られた近似式は、解析的に扱いやすい形であることが確認されただけでなく、その近似精度について数値的に確認された。

(2) 近似モデルによるシステムの性能評価

① 「生産資源に消費期限がある生産システムの近似モデルを用いた性能解析」

複数の生産資源を利用し、資源の消費期限がある生産システムについて、近似的な待ち行列モデル構築することにより、システムの性能評価方法を考案した。ここでは、時間制約に起因する待ち資源の退去過程に対して、退去率のマルコフ的な近似を行うことにより、確率モデルとしての推移構造を単純化した。さらに、近似モデルの精度について、シミュレーションとの比較実験を行うことにより、数値的に確認した。

② 「遅延制約がある複数窓口待ち行列モデルの近似解析」

到着時間間隔およびサービス時間が相型分布に従うPH/PH/c+G待ち行列モデルについて、途中退去過程のマルコフ近似を行うことによる近似モデルの提案を行った。ここでは、近似モデルが状態依存型の準出生死滅過程であることを利用し、行列解析法により性能評価量の数値計算アルゴリズムを導いた。提案した近似モデルの精度はシミュレーションとの比較実験により数値的に確認された。その結果、待ち客がサービスを受け始めるま

で待つことのできる時間分布について、分布の裾が軽い場合には、近似モデルの精度は良く、裾が重い場合には精度を見込めないことを数値的に示した。

(3) 関連する待ち行列モデルの解析

① 「窓口の休暇がある待ち行列モデルの性能解析」

遅延制約のある待ち行列モデルに関連するモデルについて、窓口の休暇がシステム性能に及ぼす影響に対する理論的な解析を行った。ポーリングシステムや窓口故障のあるシステムは窓口の休暇があるモデルに含まれ、モデルとしてあらゆる分野への応用が期待される。ここでは、待ち人数過程に対する定常分布を導出しただけでなく、時間制約および休暇がない通常の場合と比較して、モデルの確率的振る舞いが、定常分布の裾確率の意味で大きく異なることを示した。

② 「遅延制約がある待ち行列モデルにおける待ち人数分布の導出」

単一窓口待ち行列モデルにおける系内数分布の導出を行った。ここでは、到着過程がポアソン過程である場合について、仮待ち時間と実待ち時間が分布の意味で一致することを、サンプルパスの比較により示すことにより、M/G/1+G待ち行列モデルの系内数分布について、ポアソン確率関数と仮待ち時間分布の畳み込み表現によって得られることを証明した。遅延制約のある待ち行列モデルに関する研究において、本研究のように仮待ち時間分布と実待ち時間分布の同一性はあまり着目されてこなかった。そのため、本研究で得られた結果は、これまでに待ち人数分布が導出されてこなかった多くのモデルへの適用が可能であることを示唆している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

(1) Yutaka Sakuma and Atsushi Inoie, Stationary distribution of a multi-server vacation queue with constant impatient times, *Operations Research Letters*, 40 巻, pp. 239-243, 2012, 査読有.
doi:10.1016/j.orl.2012.03.006

(2) Yutaka Sakuma, Atsushi Inoie, Ken'ichi Kawanishi and Masakiyo Miyazawa, Tail asymptotics for waiting time distribution of an M/M/s queue with general impatient time, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 7 巻, pp. 593-606, 2011, 査読有.
doi:10.3934/jimo.2011.7.593

〔学会発表〕（計 4 件）

- ① 佐久間 大, 許容待ち時間を持つ待ち行列モデルにおける系内数分布について, 日本 OR 学会待ち行列研究部会, 第 237 回研究会, 東京工業大学, 2012/12/15.
- ② 佐久間 大, 井家 敦, 小林 正弘, 河西 憲一, 利用客が一般許容待ち時間をもつ待ち行列モデルの近似解析, 日本 OR 学会 2012 年秋季研究発表会, アブストラクト集, pp. 88-89, 愛知県名古屋市, 2012/9/12-13.
- ③ Yutaka Sakuma and Atsushi Inoie, An analysis of multi-server vacation queue with constant impatient times, The 6th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2011), August 23-26, 2011, Seoul, Korea.
- ④ 佐久間 大, 井家 敦, 客の途中離脱が窓口の休暇に起因する M/M/c 待ち行列モデルの定常解析, 日本 OR 学会 2011 年秋季研究発表会, アブストラクト集, pp. 210-211, 兵庫県神戸市, 2011/9/15-16.

〔その他〕

ホームページ等

<http://hwstar.hiroshima-cmt.ac.jp/~sakusa/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐久間 大 (SAKUMA YUTAKA)

広島商船高等専門学校・流通情報工学科・講師

研究者番号：00434027