

## 科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年3月31日現在

機関番号：12613

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23730212

研究課題名（和文）金利期間構造モデルへの確率的ボラティリティの導入とその経済的評価

研究課題名（英文）Introduction of stochastic volatility into term structure models and its economic evaluation

研究代表者

高見澤 秀幸（TAKAMIZAWA HIDEYUKI）

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：60361854

研究成果の概要（和文）：

本研究の主要な成果は、次の2点を明らかにしたことである。(1) 確率的ボラティリティをモデルのどの部分に導入すれば、記述力の向上がより効果的になるか。(2) 金利ボラティリティの振舞いに関する推定結果は、無裁定条件の有無によって大きく変わらない。これらの成果によって、従来から難しいとされてきた金利期間構造モデルへの確率的ボラティリティの導入が容易になり、多様なモデルを用いた上でその経済的効果を測ることが可能になった。

研究成果の概要（英文）：

It has been known that the introduction of stochastic volatility into term structure models is not straightforward. Based on this issue, the main achievements of this research are to find (1) a way to make the introduction more effective for improving the descriptive power of models, and (2) that the dynamics of interest rate volatility estimated with and without imposing no-arbitrage conditions do not much differ. By these findings, an economic evaluation of the introduction can be feasible using various types of models.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	600,000	180,000	780,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：経済学・経済統計学

キーワード：金利期間構造、イールドカーブ、ボラティリティ

## 1. 研究開始当初の背景

金利期間構造モデルとは、満期と状態変数を金利に対応させる関数である。このモデルは、無裁定条件の下で導出される。このモデルは、予測、リスク管理、派生証券のプライシングといった実用上の目的に利用されるため、実データとの整合性を高めるようモデルの精緻化を図っていくことには、大きな意義がある。

実データの確立された特徴の一つに、確率的に変動する二次の条件付きモーメント（ボラティリティ）がある（Poon and Granger, 2003）。この特徴を金利期間構造モデルに導入する試みは、従来からなされてきた（Longstaff and Schwartz, 1992）。このモデルで状態変数の一つとしてボラティリティを考慮すれば、これを観測されたイールドカーブから抽出することが可能である。このやり方は、ブラック＝ショールズ式を用い

たオプション・インプライド・ボラティリティの抽出と同様である。ところが、このイールドカーブから示唆されたボラティリティは、時系列データから得られる通常のボラティリティ (GARCHやRealized) とは異なる振る舞いを示すことが報告されている (Collin-Dufresne et al., 2009; Jacobs and Karoui, 2009)。従って、このボラティリティは予測に役立たない。このような結果がもたらされた原因は、パネル状の金利データからモデル推定を行うと、ボラティリティが時系列方向の変動を説明する要因としてではなく横断面方向の水準を説明する要因として機能してしまうことにある。その一方、ボラティリティが時系列方向の変動をよりよく説明できるよう定式化上または推定上の工夫を凝らすと、横断面方向の水準に対する記述力が低下することも報告されている (Thompson, 2008; Bikbov and Chernov, 2009)。つまり現状では、データの時系列方向と横断面方向を統合的に説明できるような金利期間構造モデルはほとんどないのである。

このように、金利データの特徴の一つである確率的ボラティリティを金利期間構造モデルのフレームワークに導入することは、困難を伴うのである。

## 2. 研究の目的

このような困難を踏まえて、本研究では次の3点を明らかにすることを目指した。

(1) 確率的ボラティリティの導入がコストを伴うものであるならば、そのコストを抑えつつ効果を高めるためには、どのようなモデル化の工夫が必要か。この疑問に答えるべく、イールドカーブの情報だけでどこまで金利ボラティリティの振舞いを捉えられるかを調べる。その上で、捉えきれない部分にのみ新たなファクターを導入すれば、ファクター数を抑制することができる。このファクター数の抑制は、計算負荷の高い金利期間構造モデルの推定においては、考慮すべき重要なポイントである。

(2) 確率的ボラティリティを導入した上で無裁定条件と統合的にモデル化を行い、イールドカーブの振舞いを推定することは、そもそも計算負荷を極めて高くする上に、想定可能なモデルを大幅に制限するという問題を引き起こす。この問題は、無裁定条件を課すことに起因する。そこで、無裁定条件を課した場合と課さない場合とで、推定結果に大幅な相違が生じるかどうかを調べる。もし、そ

のような相違が生じないのであれば、無裁定条件を課さずに得られた推定結果は、無裁定と概ね整合的ということになる。この条件を課さないでよいのであれば、モデルの選択の余地は大幅に広がることになる。

(3) 確率的ボラティリティ導入の意義と成果を、経済学的観点から検証する。通常、モデルの記述力は、平均二乗誤差などの統計的観点から評価される。しかし、統計的観点からモデルの改善が見られたとしても、それが経済的・実用的な観点からの改善であるとは限らない (Della Corte et al., 2008; Leitch and Tanner, 1991; Thornton and Valente, 2012)。金利期間構造モデルは実務的に応用されるものである以上、この観点からモデル評価を行う必要性は非常に高い。そこで、この評価を Fleming et al. (2001) の提唱した枠組みに基づいて行う。その枠組みとは次の通りである。まず、モデルを用いて債券リターンの平均と分散・共分散を予測する。次に、その予測に基づいて、債券ポートフォリオを組成する。最後に、このポートフォリオの実現収益率を求め、この収益性をもってモデルの経済的評価とする。

## 3. 研究の方法

本研究では、多様な金利期間構造モデルを想定して、統計的な観点のみならず経済的観点からそのパフォーマンスを比較検証する。しかし、無裁定条件を課したときに債券価格やその利回りを金利ファクターの解析的な関数形で導くことのできるモデルは限られている。そこで、多様なモデルを想定できるように、研究代表者の過去の研究成果である近似手法を援用する (Takamizawa and Shoji, 2003, 2004, 2009)。この手法は、条件付きモーメントを常微分方程式の解として計算するものである。債券価格は、リスク中立確率でとった割引率に対する期待値であるため、この手法を適用することができる。

次に、想定するモデルは、イールドカーブそのものが金利ボラティリティをも駆動するタイプのものとする。先行研究でもこのようなモデルは提案されているが、駆動するのは一部の金利ファクターのみであった。本研究では、このような制約を外し、主要な金利ファクターすべてが駆動するようなモデルを考える。

経済的観点からモデルを評価する方法は、先行研究のサーベイを通じて把握する。その上で、どの方法が今回の問題にとって適しているかを判断する。

分析に必要なデータセットは、日米の

LIBOR とスワップ金利を用いる。これらのデータは広く普及しており、収集コストを抑えられる。

#### 4. 研究成果

(1) 金利期間構造モデルに対し確率的ボラティリティを効果的に導入するためには、どのような工夫が必要か。その一つの答えは次の通りである。

イールドカーブを駆動するファクターとしてよく知られているのは、水準 (level)、傾き (slope)、曲率 (curvature) である (以下、これらを金利ファクターと呼ぶ)。この3つがあれば、イールドカーブの変動をほぼ捉えることができる。もし、これらの金利ファクターが金利ボラティリティをも駆動しているならば、ファクター数を増やすことなく確率的ボラティリティを導入することが可能となる。そこで、この可能性を検証した。その際、考慮するモデルには工夫が必要である。なぜなら、金利ファクターの変動過程の共分散行列は、正定値行列である必要があるからである。この行列が金利ファクターに依存しつつ、正定値性を維持するようなモデルを考えた。具体的には、共分散行列の固有値を金利ファクターの二次関数で定式化したモデル (モデル Q) と指数関数で定式化したモデル (モデル E) を考えた。

米国金利を用いた実証結果は次の通りである。まず、傾きファクターのボラティリティは、金利ファクターによってうまく説明できる。特に、モデル Q は、標準的な GARCH モデルよりも平均平方誤差の観点から高い説明力・予測力を示した (図 1・2 を参照)。

一方、水準ファクターや曲率ファクターのボラティリティは、金利ファクターだけで説明・予測するのは困難であることが判明した (図 3・4 を参照)。これを補うためには、イールドカーブを駆動するファクターとは独立の (よって債券のみからはリスクヘッジのできない) ファクターを導入することが必要となる。この独立なボラティリティ・ファクターの必要性については、従来の研究が指摘するところであった。しかし、具体的にどの部分に導入すれば効果的であるかまでは明らかにされていなかった。この点を明らかにしたことは、本研究の貢献である。これらの成果は、論文 “Predicting Interest Rate Volatility Using Information on the Yield Curve” にまとめ、現在海外学術誌に投稿中である。

尚、これらの結果が日本金利にも当てはまるかはまだ確認していない。これは論文作成を優先させたためである。しかし、金利ファ

クターの振舞いについては国際間での類似性が指摘されているため、日本金利にも当てはまるものと予想される。

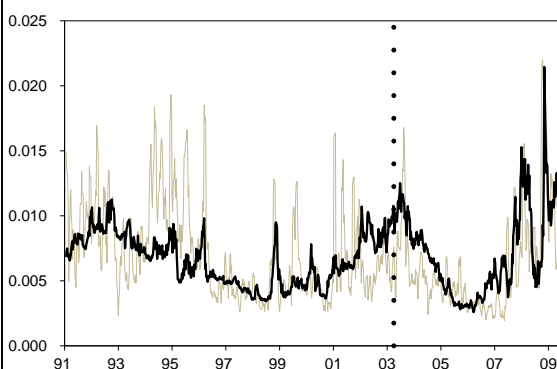


図 1 : 傾きファクターの実現ボラティリティ (細線) とモデル Q による予測値 (太線)

注) 実現ボラティリティは、4 週先の条件付き標準偏差の実現値 (年率換算)。以下同様。

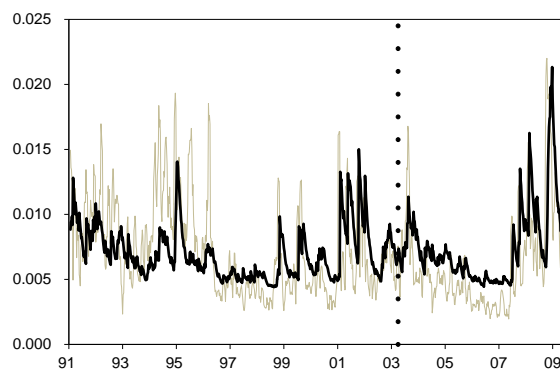


図 2 : 傾きファクターの実現ボラティリティ (細線) と GARCH モデルによる予測値 (太線)

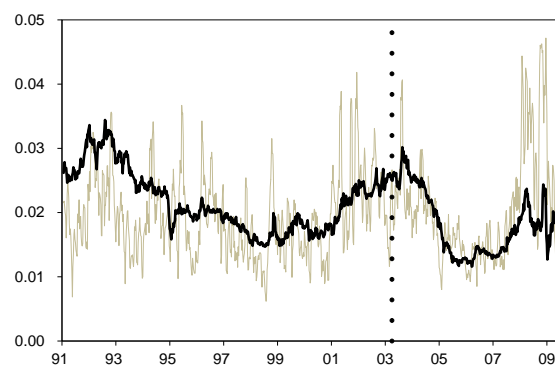


図 3 : 水準ファクターの実現ボラティリティ (細線) とモデル Q による予測値 (太線)

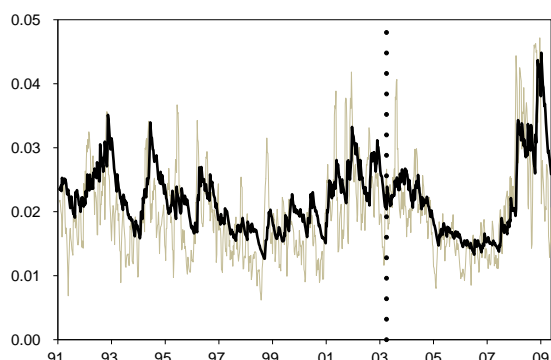


図4：水準ファクターの実現ボラティリティ（細線）とGARCHモデルによる予測値（太線）

(2) イールドカーブや金利ボラティリティの振舞いを推定するとき、無裁定条件の有無によって推定結果は変わるであろうか。もし無裁定条件が推定上の制約とはならないならば、この条件を課さず、従って横断面の関係を規定せず、時系列データのみから得られた推定結果は、それを課して得られた推定結果と大差はないはずである。もしそうであるならば、無裁定条件を課さないことによって、計算負荷を抑えたままモデル選択の自由度を飛躍的に高めることができるであろう。

この可能性を検証すべく、具体的に次の2つの疑問を提起した。

- ① 無裁定条件は、イールドカーブからのファクターの同定に影響を及ぼすか。
- ② 無裁定条件は、金利ボラティリティの推定・予測に影響を及ぼすか。

この2つの疑問に対して、以下の答えを得た。まず、①の答えは、モデルに定式化上の問題がなければ「NO」である。ただし、定式化上問題があるモデルとは、事後的に同定されたファクターが事前の想定通りに振舞わないようなモデルのことである。

次に、②の答えも「NO」である。無裁定条件を課すと、二次のモーメントを捉えるパラメータは、金利の横断面方向の制約を受けることになる。しかし、この制約は小さく、推定結果には大きな影響を及ぼさないことがわかった。従って、金利ボラティリティの予測も、無裁定条件の有無によって大きく異なることはない（図5・6を参照）。

先行研究は、無裁定条件が金利水準の予測にとって制約的ではないことを示していた（Joslin et al., 2011）。本研究の貢献は、その知見をさらに一歩進めて、金利ボラティリティの予測にとっても同様に制約的ではないことを示したところにある。これらの成果は、論文“Impact of No-Arbitrage on Interest Rate Dynamics”にまとめ、現在海外学術誌に投稿準備を進めている。

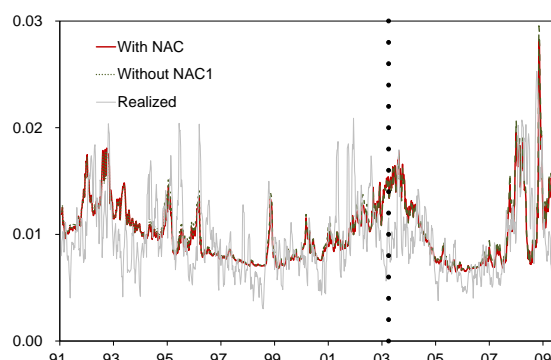


図5：2年債利回りに関する4週先実現ボラティリティ（細線）とモデルQによる予測値：実線は無裁定条件あり、点線はなしのケース

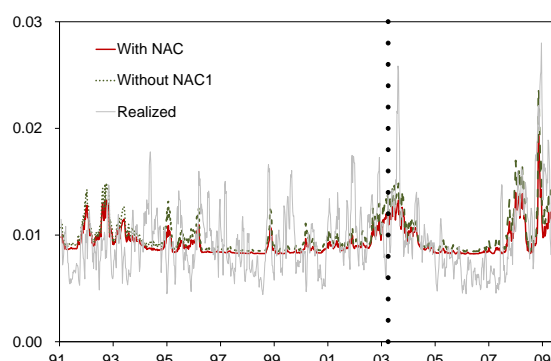


図6：10年債利回りに関する4週先実現ボラティリティ（細線）とモデルQによる予測値：実線は無裁定条件あり、点線はなしのケース

(3) 確率的ボラティリティ導入の経済的観点からの評価に関する解析は、現在進行中であり、まだ結論を得ていない。これは、(1)・(2)の成果を出すことを優先させたためである。これらの成果は、多様なモデルを用いて経済的評価を行う上で欠かせないものである。

(参考) 1～4で参照した論文リスト：

- ① Bikbov, R., and M. Chernov, 2009, “Unspanned stochastic volatility in affine models: Evidence from Eurodollar futures and options,” *Manag. Sci.* 55, 1292-1305.
- ② Collin-Dufresne, P., R. S. Goldstein, and C. S. Jones, 2009, “Can interest rate volatility be extracted from the cross section of bond yields?” *J. Fin. Econ.* 94, 47-66.

- ③ Della Corte, P., L. Sarno, and D. L. Thornton, 2008, "The expectation hypothesis of the term structure of very short-term rates: Statistical tests and economic value," *J. Fin. Econ.* 89, 158-174.
- ④ Fleming, M. J., C. Kirby and B. Ostdiek, 2001, "The economic value of volatility timing," *J. Fin.* 56, 329-352.
- ⑤ Jacobs, K., and L. Karoui, 2009, "Conditional volatility in affine term-structure models: Evidence from Treasury and swap markets," *J. Fin. Econ.* 91, 288-318.
- ⑥ Joslin, S., K. J. Singleton, and H. Zhu, 2011, "A new perspective on Gaussian dynamic term structure models," *Rev. Fi. Stud.* 24, 926-970.
- ⑦ Leitch, G., and J. Tanner, 1991, "Economic forecast evaluation: Profits versus the conventional error measures," *Ame. Econ. Rev.* 81, 580-590.
- ⑧ Longstaff, F. A., and E. S. Schwartz, 1992, "Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model," *J. Fin.* 47, 1259-1282.
- ⑨ Poon, S. H., and C. W. J. Granger, 2003, "Forecasting volatility in financial markets: a review," *J. Econ. Lit.* 41, 478-539.
- ⑩ Takamizawa, H., and I. Shoji, 2003, "Modeling the term structure of interest rates with general short-rate models," *Fin. Stoc.* 7, 323-335.
- ⑪ Takamizawa, H., and I. Shoji, 2004, "On accuracy of local linear approximation for the term structure of interest rates," *Quant. Fin.* 4, 151-157.
- ⑫ Takamizawa, H., and I. Shoji, 2009, "Modeling the term structure of interest rates with general diffusion processes: A moment approximation approach," *J. Econ. Dyna. Cont.* 33, 65-77.
- ⑬ Thompson, S., 2008, "Identifying

term structure volatility from the LIBOR-swap curve," *Rev. Fin. Stud.* 21, 819-854.

- ⑭ Thornton D. L., and G. Valente, 2012, "Out-of-sample predictions of bond excess returns and forward rates: An asset allocation perspective," *Rev. Fin. Stud.* 25, 3141-3168.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① Takamizawa, Hideyuki, 2012, "Predicting Interest Rate Volatility Using Information on the Yield Curve," Hitotsubashi University Center for Financial Research Working Paper Series G-1-3, 1-32.

[学会発表] (計4件)

- ① 高見澤秀幸, "Impact of No-arbitrage on Interest Rate Dynamics," 大阪大学 CSFI 中之島ワークショップ (2012年11月30日, 大阪大学).
- ② 高見澤秀幸, "Is non-arbitrage relevant to volatility prediction using interest-rate data?" 一橋大学 ICS ファカルティセミナー (2011年12月12日, 一橋大学).
- ③ 高見澤秀幸, "Is non-arbitrage relevant to volatility prediction using interest-rate data?" 一橋大学金融研究会 (2011年10月20日, 一橋大学).
- ④ 高見澤秀幸, "Is non-arbitrage relevant to volatility prediction using interest-rate data?" 日本統計学会 (2011年9月6日, 九州大学).

[その他]

ホームページ等

<http://cm.hit-u.ac.jp/~takamizawa/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高見澤 秀幸 (TAKAMIZAWA HIDEYUKI)  
一橋大学・大学院商学研究科・准教授  
研究者番号: 60361854