様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 １１ 日現在

機関番号： １０１０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2011～2014
課題番号： ２３７４０００１

研究課題名（和文）ｐ進ホッジ理論とその周辺

研究課題名（英文）p-adic Hodge theory and its application

研究代表者
森田　知真（MORITA, Kazuma）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・助教

研究者番号：４０５４８１８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：(1). p進Hodge理論の高次元化において，L.Bergerのp進モノドロミー定理を一般化することができた．(2). P.Deligne の混合Hodge構造のカテゴリーでは代数的サイクルの情報を十分には捉えられないという事実に基づき，代数サイクルの情報を捉えることができるカテゴリーを構成することができた．(3). 数論的楕円曲線の有理点という離散的な対象があたかも連続的に振る舞うことを示した．(4). 上記の(2)と(3)における考察に基づき，理論物理学においてさまざまな考察を行った．

研究成果の概要（英文）：(1). In the higher dimensional p-adic Hodge theory, I generalized the p-adic monodromy theorem due to L.Berger. (2). It is known that the mixed Hodge structure due to P.Deligne cannot enough information about algebraic cycles and I constructed the new category which can capture the information about algebraic cycles. (3). I showed that rational points on arithmetic elliptic curves which are discrete objects could behave as continuous objects. (4). Based on the study on (2) and (3), I gave some observations on theoretical physics.

研究分野： 整数論

キーワード： p-adic Hodge theory　algebraic cycle　elliptic curve

１．研究開始当初の背景

(1)．p 進 Hodge 理論の研究
修士課程以来，p 進 Hodge 理論の研究を行ってきた．p 進 Hodge 理論は古典的な複素代数幾何学における Hodge 理論の p 進類似として，発展してきたものである．また，斎藤盛彦による Hodge 加群の理論に見られるように，古典的な Hodge 理論においても family の理論は非常に重要な役割を果たしてきた．このような中で当申請者は，p 進 Hodge 理論の family，つまり，基礎体の次元が高いときの研究がメインのテーマであった．

(2)．Hodge 理論とサイクルの研究
p 進 Hodge 理論の研究を進めていくなか，その大本の理論である古典的な複素代数幾何学における混合 Hodge 構造に目をむけることになった．Deligne の混合 Hodge 理論におけるカテゴリーでは，幾何的な情報が乏しく，regulator map（サイクルの情報を持つモチーフのカテゴリー)→(混合 Hodge 構造のなすカテゴリー)を通して，サイクルの情報を捉えることが困難であった．具体的に言うと右の混合 Hodge 構造のなすカテゴリーにおいて，２次以上の extension 類が消えてしまい，混合ホッジ構造のなすカテゴリーから得られるサイクルの情報は chern map を通した 0 次の extension 類と Abel-Jacobi map を通した１次の extension 類だけである．代数多様体の複素数体上の次元が n のときは，n 次の extension 類まで捉えられるべきという哲学が存在していた．これは冒頭にも述べたように，混合 Hodge 構造のなすカテゴリーが幾何的な情報をあまり含んでいないことに起因すると考えられる（このカテゴリーの対象は抽象的なベクトル空間とふたつのフィルターからなっているのみである)．

(3)．楕円曲線上の有理点の研究
p 進 Hodge 理論の数論的な応用として，岩澤理論の研究が挙げられる．近年，加藤和也，Skinner-Urban によって，楕円曲線に対する岩澤主予想が 解決されたことで，さらに，p 進 Hodge 理論による手法が重要さを増している．BSD 予想に代表されるように，楕円曲線上の有理点の研究は数論幾何学において，最も重要な分野のひとつである．BSD 予想によれば，楕円曲線の有理点の情報は解析的な L 関数の言葉で記述できるというものであるが，このことに基づいて，有理点が連続的な振る舞いをすべきだという認識を持って研究を始めた．

(4)．理論物理学の研究
上記の(2)と(3)における考察に基づき，ひとつの試みとして物理学への応用を思いついた．この考えは突飛なものではなく，古くはボーア条件のような物理量の離散化，カシミールエネルギーとゼータ関数の関係，最近の超弦理論による空間の離散化など整数論と関係があるのではないかと匂わせる雰囲気の中，研究をすすめた．

２．研究の目的

(1)．p 進 Hodge 理論の研究
当初の目標として，Laurent Berger による Potentially semi-stable 定理 (de Rham 表現=potentially semi-stable 表現を主張) の高次元化を目指すものであった．

(2)．Hodge 理論とサイクルの研究
混合 Hodge 構造のなすカテゴリーを一般化し，chern map を通した 0 次の extension 類と Abel-Jacobi map を通した 1 次の extension 類のみならず，高次の extension 類を捉えられることのできるカテゴリーの良い候補を提示することである．

(3)．楕円曲線上の有理点の研究
楕円曲線上の整数点や有理点といった離散的な対象を真に幾何的に，つまり連続的な対象として取扱いたいというものであった．また，どのような幾何的な制限が有理点の連続的な振る舞いに影響を与えるかを見つけ出すことが大きな課題であった．

(4)．理論物理学の研究
上記の(2)における混合 Hodge 構造のなすカテゴリーの一般化において，場の量子論における生成・消滅作用素の類似と思しきものを用いた．この類似を辿ることが大きな目的となった．また，(3)において用いた保型形式の変形の類似を物理学における波動方程式においても求めようというのも目的となった．

３．研究の方法

(1)．p 進 Hodge 理論の研究
p 進ガロア表現を p 進微分方程式の言葉で置き換えるということが(Phi,Gamma)加群の理論によって，可能になった．高次元の p 進 Hodge 理論においては，微分作用素が複数，現われることになり，状況が複雑になる．Laurent Berger による p 進モノドロミー定理を高次元化するための中心となるアイデアは高次元化する前と高次元化した後での様子を比較するというものであり，これはかなり独特の見解であったと言える．

(2)．Hodge 理論とサイクルの研究
混合 Hodge 構造のなすカテゴリーに対して，幾何的な情報をどのように付け加えるかが問題になる．このために，サイクルの向きということに着目した．このアイデアは一見，かなり安直なものであるが，代数的サイクルの交差を記述することができ，新し

いカテゴリーにその情報を組み込むことにした．

(3)．楕円曲線上の有理点の研究
楕円曲線は数学の様々な分野が交差する分野であり，非自明な数論的曲線のなかで具体的に取り扱える唯一のものである．このようななか，Petersson 内積という解析的であり，幾何的であり，実は代数的でもあるよく知られた道具を使うことにより，楕円曲線上の有理点があたかも連続に振る舞うことを示した．

(4)．理論物理学の研究
上記の(2)や(3)の研究の類似を物理学にも求めようとアインシュタインによる特殊相対性理論と場の量子論における波動関数の第二量子化のフーリエ展開に対する考察を行うことによって，これらの研究は始まった．

４．研究成果

(1)．p 進 Hodge 理論の研究
① p進Hodge理論を高次元化する前と行った後で，つまり，基礎体の剰余体を完全化する前と行った後では，p 進表現の様子があまり変化しないという結果を得ることができた． つまり，高次元 de Rham 表現=de Rham 表現=potentially semi-stable 表現=高次元 potentially semi-stable 表現ということになり，直ちに，Laurent Berger による Potentially semi-stable 定理の高次元化がしたがうことになる．この基礎体の剰余体を完全化する前と行った後では，p 進表現の様子があまり変化しないという結果は当初目的としていた Laurent Berger の結果の高次元化というものを簡単な系と含むことになり，p 進 Hodge 理論の family の理論において，様々な応用が見込まれている．また，東京大学の辻雄教授により，この結果は一般化されている．この結果は以前に得られたていた自身の Hodge-Tate and de Rham representations in the imperfect residue field case と併せることで Crystalline and semi-stable representations in the imperfect residue field case にまとめ上げた．
② また，上記の結果を得るために p 進微分作用素とよばれるものを用いたが，この微分作用素は複素代数幾何学の family の理論において，Nicolas Katz などによる transversality や local monodromy 定理など，Gauss-Manin 接続と非常に似通った性質をもつことが分かっていた．一方で，Spec(Z_p)上の数論的多様体を底空間を Spec(Z_p)とする family と見なすことができる．つまり，一般ファイバーが p 進体 Q_p 上の多様体で，中心ファイバーが有限体 F_p 上の多様体となる．このことに着目して，上記で用いた p 進微分作用素の類似を辿り，新たな作用素が存在することを提示した（プレプリント Generalization of the theory of Sen in the semi-stable representation case）．この微分作用素は，上記と同様に，Nicolas Katz などによる transversality や local monodromy 定理など，Gauss-Manin 接続と非常に似通った性質をもつことが分かった．さらには，整数論という離散的な対象を研究する分野において，p 進数体 Z_p に微分作用素という解析的な道具を用意できたのは意味が大きいと思われる．

(2)．Hodge 理論とサイクルの研究
サイクルの向きということに着目して，代数的サイクルの交差を記述することができると上記で述べたが，これは Grothendieck の“サイクルの交差に深い数論的事実が組み込まれている”という哲学にもかなっている．混合 Hodge 構造のなすカテゴリーの一般化として重要な候補のひとつを提示できたと信じている．少なくとも，2 次の extension 類が消えないことを示すことにはなった．この結果は Generalization of the theory of mixed Hodge structure and its application なるプレプリントにまとめた．

(3)．楕円曲線上の有理点の研究
Peterson 内積を使うことによって，楕円曲線上の有理点があたかも連続的に振る舞うことを示すことができた．さらに，有理点の存在や消滅が各有限体 F_p へ還元したときの多様体の特異性と深くかかわっているという事実を示したことである．この結果はプレプリント On the topological aspects of arithmetic elliptic curves にまとめあげた．

(4)．理論物理学の研究
波動関数の第二量子化のフーリエ展開と整数論における保型形式を比較することによって，場の量子論に新たに数学的解釈を与えることになった．これは，整数論における素数と場の量子論における運動量を比較することにも相当する（プレプリント On the mathematical interpretations of quantum field theory）．また，この解釈を用いて，カシミールエネルギーがゼータ関数の特殊値で記述できるというよく知られた事実が自然に解釈できることを示した．これによって，全く関係のない物理学と整数論とが自然に結びつくことを示したものである．特に，近年の超弦理論などによる物質の離散化などによりこの結果はますます重要なものになると考えられる（プレプリン On the arithmetic interpretations of Casimir energy）．さらには，(3)における楕円曲線に付随する保型形式の変形の類似を場の量子論における波動関数に求め，その結果をまとめあげた（プレプリント Deformation

theory of quantum field).

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① Author: Kazuma Morita
Title: Crystalline and semi-stable representations in the imperfect residue field case
Asian J. Math. 18 (2014), no. 1, 143--158.
(査読有り)

〔学会発表〕（計２件）
① 講演者名: 森田知真
講演タイトル: Calculations of elliptic modular forms
会議等名称: 数論幾何セミナー, 北海道大学(北海道, 札幌市), 2013 年 10 月 13 日

② 講演者名: 森田知真
講演タイトル: Cremona on elliptic curves
会議等名称: 数論幾何セミナー, 北海道大学(北海道, 札幌市), 2012 年 2 月 9 日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://kazuma-morita.jimdo.com/
(Webpage of Kazuma Morita-Mathematics)

６．研究組織
(1)研究代表者
森田 知真 (MORITA, Kazuma)
北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・助教
研究者番号：40548187

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：