

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740002

研究課題名（和文） アソシエーションスキームの表現とその応用

研究課題名（英文） Representations of association schemes and their applications

研究代表者

田中 太初（TANAKA HAJIME）

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：50466546

研究成果の概要（和文）：完全グラフの特殊な分割であるアソシエーションスキームは、実験計画法、符号・デザイン理論等の分野に於いて統一的枠組みを提供する。アソシエーションスキームの各頂点に付随する非可換半単純代数（Terwilliger 代数）や半正定値計画等の新たな道具に基づきこれらの応用理論を拡張することを目指し、特に相対 t -デザインの理論や極値集合論に関して、所謂 Fisher 型不等式やある種の交叉定理等、従来手法では示せなかったいくつかの結果を証明することに成功した。

研究成果の概要（英文）：Association schemes are certain special decompositions of complete graphs, and provide a unified framework to experimental designs, error-correcting codes, combinatorial designs, and so on. I worked on developing applications of new tools such as semidefinite programming and the Terwilliger algebra, which is a noncommutative semisimple algebra associated with each vertex of an association scheme. In particular, I obtained (among other results) the so-called Fisher-type inequality for relative t -designs as well as a new intersection theorem in extremal set theory. These results should demonstrate the power of these new tools.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組合せ論、アソシエーションスキーム、ターウィリガー代数、半正定値計画、符号、組合せデザイン

1. 研究開始当初の背景

完全グラフの特殊な分割であるアソシエーションスキームは、実験計画法、符号・デザイン理論等の分野に於いて統一的枠組みを提供する。1973年のP. Delsarteの理論を代表とするこれらアソシエーションスキームの応用は、特に1990年代以降様々な拡張が試みられている。Delsarte理論の根幹は、可換半単純代数である Bose-Mesner 代数に基づいた線型計画の手法にあったが、今世紀

に入り、A. Schrijverによる符号の半正定値計画限界等の、Bose-Mesner 代数を含む非可換半単純代数である Terwilliger 代数の表現論に本質的に基づいた新たな手法が提唱され始めた。私は（主に）これらの手法によって Delsarte 理論を拡張・再整備することの重要性を直ちに認識し、優秀若手研究者海外派遣事業（平成22年3月～平成23年3月）等に於いて精力的に取り組んできた。この間に、私自身の研究の進展に加え、Terwilliger 代数の理論と量子確率論との新たな繋がり（す

なわち古典確率変数の量子分解)が見出されたことや、M. Rahman・P. Terwilliger 等による他変数 Krawtchouk 多項式の研究の進展等の新たな展開を受けて、本研究をさらに2年間の研究プロジェクトとして集中的に継続・発展させることを提案するに至った。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「1. 研究開始当初の背景」で既に述べた通り、アソシエーションスキームのこれまでの応用の多くを包括する拡張理論を、Terwilliger 代数等の新たな立場から整備することである。標語的には、アソシエーションスキームの古典的応用理論の「量子化・他変数化」を目標としている。従来の理論は、ある意味で Terwilliger 代数の自明加群に関するものであり、他の「良い」既約加群、さらにはその線形代数的抽象化である Leonard 対のレベルで展開することを目指す。一方、Schrijver 等による半正定値計画を適用する試みでは、コンピュータを用いて具体的な(小さな)パラメータについて符号等の位数の限界を計算する段階に留まっており、Delsarte 理論の真の拡張として、半正定値計画の双対性を部分構造の解析に本格的に応用することを目指す。

3. 研究の方法

(1)平成23年7月には、研究協力者である米国 Wisconsin 大学の Paul Terwilliger 氏のもとに滞在し、Leonard 対の一般化である3重対角対に関して、多くの議論・情報交換を行った。その後も研究集会等で直接議論を行う機会を持った。

(2)平成24年8月(学会発表(1)の後)に上海交通大学の坂内英一氏・坂内悦子氏、及び同12月に国際基督教大学の須田庄氏をそれぞれ数日間訪問し、集中的な議論の機会を持った。ここで行った議論が後述する「4. 研究成果」(2), (3)の基礎或いは出発点となり、大きな意義があった。

(3)極値集合論に関する研究(「4. 研究成果」(3))等では、コンピュータにより多くの実験を行うことが、一般的な結果を予測する上で大変重要な役割を果たした。半正定値計画の計算に強いパッケージソフトウェア Matlab を主に用いたが、必要に応じて NEOS Server (<http://neos-server.org/neos/>)等のオンラインツールも活用した。

(4)谷口哲至氏(松江工業高等専門学校)・澤正憲氏(名古屋大学)・佐野良夫氏(筑波大学)と共同で、代数的/スペクトルグラフ理

論に関する研究集会を平成25年1月に名古屋大学で開催した。Terwilliger 氏・Jack Koolen 氏 (POSTECH)・Aleksandar Jurišić 氏 (Ljubljana 大学)等の海外の著名な研究者も多く参加し、集中的な情報交換を行うことができた。

4. 研究成果

(1)極値集合論で大変重要な Erdős-Ko-Rado の定理は最終的に R. Wilson によって1984年に完全な形で証明されたが、この証明は実際 Delsarte 理論の最も顕著な成功例の一つである。この定理はその後、種々の距離正則グラフへ拡張されてきた(雑誌論文(2)等)が、その証明の核心的な部分、すなわちある線型計画問題の双対問題の「良い」実行可能解の構成を、より抽象的な枠組みである Leonard 対のレベルで展開し、統一的な議論を行った(距離正則グラフは所謂 P-多項式スキームと本質的に同値な概念である)。Terwilliger は Leonard 対の作用するベクトル空間の24種類の自然な基底を考察し、これらの基底間の変換行列等を詳細に記述したが、本研究ではさらに新たな基底を導入し、Terwilliger の基底の一つ(すなわち「標準基底」)との変換行列の決定が上述の実行可能解の構成と同値であることを示した。従って特に、このような実行可能解は(存在すれば)一意的に定まることが分かった。さらにこの変換行列を、Leonard 対の完全不変量である「パラメータ配列」を用いて記述した。以上の結果は単なる理論上の興味からだけではなく、組合せ的な制約からいったん離れ、問題の本質のみを抽出して統一的な視点を得ることを可能にする上でも非常に重要であり、後述の(3)の研究にも大きく反映されている。なお、これらの成果をまとめた論文は Contributions to Discrete Mathematics に掲載が決定している。この論文に関連した私の一連の研究に関して、平成24年7月にインドネシア・Bandung 工科大学、及び同8月に中国・上海交通大学で開催された二つの国際研究集会で口頭発表を行った(学会発表(1), (3))。

(2)坂内英一氏・坂内悦子氏・須田庄氏と共同で、アソシエーションスキーム上の相対 t -デザインに関する研究を行った。これは1970年代に Delsarte によって導入された、アソシエーションスキーム上の t -デザインの概念の一般化で、所謂ユークリッド t -デザインに対応するものであるが、ユークリッド t -デザインが活発に研究されているのとは対照的に、相対 t -デザインの組織的な研究は、特定の場合(すなわち2進 Hamming スキーム)を除き、現在までほとんど行われていなかった。その主な理由の一つは、相対 t -デザイン

の基礎空間であるアソシエーションスキームの対称性/正則性が、ユークリッド t -デザインの基礎空間 (\mathbb{R}^n) のそれと比べて非常に弱いことであるが、本研究では Terwilliger 代数の表現論を駆使することによって、既約加群に関する自然な仮定の下で、相対 t -デザインの位数に関する Fisher 型不等式と呼ばれる限界式を具体的に記述した。また、この過程で見出されたある種の双対性に着目し、符号の基礎空間であり最も基本的なアソシエーションスキームである Hamming スキームの新たな代数的特徴付けを得ることができた。これらの成果については現在論文を投稿中である (arXiv:1303.7163)。

(3) 須田庄氏と共同で、有限体上の有限次元ベクトル空間の二つの部分空間族間の交叉に関する定理を、半正定値計画の双対性を用いて証明することに成功した。これはベクトル空間上の Erdős-Ko-Rado の定理のある種の一般化であり、また松本眞・徳重典英による二つの集合族間の交叉に関する 1989 年の結果の q -類似でもある。なお、松本・徳重の結果は Kruskal-Katona の定理と呼ばれる有名な定理をフルに活用して証明されたが、この定理に相当するものはベクトル空間の場合には(完全な形では)未だに得られていないことに注意する。前述の通り、ベクトル空間上の Erdős-Ko-Rado の定理は Delsarte の線型計画の手法を用いて証明されるが、本研究で導入した半正定値計画問題は、特殊な場合を除き、線型計画問題に帰着することはできない。しかしながら、Erdős-Ko-Rado の定理の場合と同様に、やはり双対問題の「良い」実行可能解を具体的に構成することで証明を行った。当然ながら、我々の場合は実行可能解の構成自体が格段に困難な問題となるが、ここでも半正定値計画の双対性を巧妙に利用した。この成果については現在論文を投稿中 (arXiv:1304.5466) であり、平成 25 年 6 月にハンガリー・Pannon 大学で開催される研究集会で(招待)講演を行う予定である。なお、本研究で取り扱ったのは最も基本的な所謂 1-交叉の場合であるが、より一般の t -交叉の場合についても双対問題の実行可能解を記述する原理は既に確立できており、今後順次取り組む予定である(上記(1)の拡張として、3 種類の Leonard 対の相互関係を考察する必要がある)。

(4) Schrijver の半正定値計画限界を代表とする、代数的組合せ論に於ける半正定値計画の現在までの応用の整理に取り組み、平成 23 年 10 月に関西大学で開催された数理計画に関する研究集会で講演を行った(学会発表(6))。また、距離正則グラフに関する 100 ページを超える解説論文の執筆を Edwin van

Dam 氏(Tilburg 大学)及び Jack Koolen 氏と継続して進めており、現時点では草稿を Van Dam 氏のウェブサイトにて公開している (<https://sites.google.com/site/edwinvandam/home>)。これらの作業を通して、アソシエーションスキームや距離正則グラフの一般論、及びそれらの応用理論に関して膨大な知見の蓄積を行っており、本研究計画の遂行に於いて大きく反映されていることを強調したい。

可換 Bose-Mesner 代数と線型計画法に基づいた Delsarte の理論を、Terwilliger 代数や半正定値計画法の観点から拡張することは、本研究計画の主要なテーマであったが、以上のように、この点に関して真の(すなわち従来の Delsarte 理論に帰着されない)進展をいくつか得ることができた。これは、アソシエーションスキームの応用理論の今後の発展に於いても、大変重要なステップであると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- (1) 田中太初, The Erdős-Ko-Rado basis for a Leonard system, Contributions to Discrete Mathematics, Faculty of Science, University of Calgary, 掲載決定, 査読有.
- (2) 田中太初, The Erdős-Ko-Rado theorem for twisted Grassmann graphs, Combinatorica, Springer, 32 巻, 6 号, pp. 735-740, 2012, 査読有. DOI: 10.1007/s00493-012-2798-5
- (3) Evangelos Georgiadis, 宗政昭弘, 田中太初, A note on super Catalan numbers, Interdisciplinary Information Sciences, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University, 18 巻, 1 号, pp. 23-24, 2012, 査読有. DOI: 10.4036/iis.2012.23
- (4) 田中太初, Vertex subsets with minimal width and dual width in Q -polynomial distance-regular graphs, Electronic Journal of Combinatorics, 18 巻, P167, 2011, 査読有. URL: <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v18i1p167>

[学会発表] (計 7 件)

- (1) 田中太初, Extending the Erdős-Ko-Rado theorem, 2012 Shanghai Conference on

- Algebraic Combinatorics, 上海交通大学, 上海, 中国, 2012年8月20日.
- (2) 田中太初, Terwilliger 代数の応用, 柏崎数学セミナー, 新潟工科大学, 2012年8月9日.
 - (3) 田中太初, Extending the Erdős-Ko-Rado theorem, The 5th International Workshop on Optimal Network Topologies, Institut Teknologi Bandung, Bandung, インドネシア, 2012年7月27日.
 - (4) 田中太初, Extending the Erdős-Ko-Rado theorem, 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究」, 京都大学数理解析研究所, 2012年3月7日.
 - (5) 田中太初, The Erdős-Ko-Rado theorem for twisted Grassmann graphs, The 10th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, 浦項工科大学, 浦項, 韓国, 2012年1月26日.
 - (6) 田中太初, 代数的組合せ論に於ける半正定値計画の応用, 第23回 RAMP シンポジウム, 関西大学, 2011年10月24日.
 - (7) 田中太初, Vertex subsets with minimal width and dual width in \mathbb{Q} -polynomial distance-regular graphs, Geometric and Algebraic Combinatoris 5, Hotel Conferentiecentrum Boschoord, Oosterwijk, オランダ, 2011年8月17日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~htanaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 太初 (TANAKA HAJIME)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号: 50466546