

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740005

研究課題名(和文) W-constraints in Singularity Theory

研究課題名(英文) W-constraints in Singularity Theory

研究代表者

MILANOV Todor (MILANOV, Todor)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任助教

研究者番号：80596841

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：あるクラスの場の量子論の相関関数を特徴付けるために使われる頂点代数の表現を特異点論における周期写像を経由して構成した。特に単純特異点の場合について達成することが主目標であった。次に、その相関関数達がEynard-Orantinの再帰関係式を満たすことを示した。特に、特異点論における全ancestorポテンシャルの解析性に関するギーベントールの予想に証明をつけることができた。頂点代数の表現とEynard-Orantinの再帰関係式との間の関係性を理解することは大変興味深い問題であり、 $W$ 代数の表現論に新たな視点を提供すると期待される。

研究成果の概要(英文)：We constructed a vertex algebra representation via the period map in singularity theory that can be used to characterize the correlation functions of a certain class of Quantum Field Theories. In particular, the main goal of the proposal was achieved for simple singularities. The 2nd major achievement is the discovery that the correlation functions satisfy an Eynard-Orantin recursion. In particular, I managed to prove a conjecture of Givental about the analyticity of the total ancestor potential in singularity theory. Understanding the relation between the vertex algebra representation and the Eynard-Orantin recursion seems to be a very interesting problem that could bring a new insight on the representation theory of  $W$ -algebras.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 代数学

キーワード：エイナル - オランタン再帰関係式 周期積分 フロベニウス構造 平坦構造 頂点代数

## 1. 研究開始当初の背景

量子コホモロジーが半単純であるような非特異射影オービフォールドの Gromov-Witten (GW) 不変量は、対応するミラーな Landau-Ginzburg (LG) model を持つと期待されており、ある微分方程式系を解くことにより GW 不変量を計算できると期待される。この提案は、ギーベンタールによるもので、LG model 自体は齋藤恭司により創始された原始形式の理論に起源を持つ。すなわち、与えられた孤立特異点を持つ正則関数に対して、その特異点の最小な普遍変形の空間にフロベニウス構造 (平坦構造) を入れることができ、この構造は非特異射影オービフォールドの量子コホモロジーと見ることができる。更に、GW 理論における高種数における再構成定理に従って、その特異点の最小な普遍変形の空間上に、全 ancestor ポテンシャルと呼ばれている相関関数達の母関数を定めることができる。特異点が単純特異点の場合は、全 ancestor ポテンシャルは、弦方程式を満たす一般化された KdV 階層の関数であることが知られている。また、弦方程式を満たす一般化された KdV 階層に対する解はただ一つで、その解は W 代数と呼ばれるリー代数の最高ウェイトベクトルとして特徴付けられることも知られている。

## 2. 研究の目的

GW 理論における主予想のひとつにピラソロ予想とよばれ、それは任意の非特異射影オービフォールドの GW 不変量の母関数はピラソロ代数の最高ウェイトベクトルであることを主張するものである。その予想は、量子コホモロジーが半単純であるような非特異射影オービフォールドの場合は正しいことが分かっている。特に、特異点論に対応する場合は正しい。特異点が単純特異点の場合は、W 代数がピラソロ代数の一般化となっている。研究計画当初においては、一般化された KdV 階層の W 代数がギーベンタールの高種数における再構成定理に適合するかどうかと特異点論におけるピラソロ拘束が W 代数としての一般化を持つかどうかを理解することを主に考察していた。

## 3. 研究の方法

研究計画当初において、A 型特異点の場合については既にいくつかの結果を得ていた。特に、Adler-Moerbeke の結果を、A 型特異点の周期写像を使った W 代数の表現を構成することによって再証明していた (B. Bakalov 氏との共著論文、arXiv:1203.3414)。全 ancestor ポテンシャルが最高ウェイトベクトルであるという証明は、ギーベンタールの

高種数再構成定理の観点からすると非常に自然である。A 型以外の単純特異点の場合は、齋藤恭司による原始形式の理論における周期積分を使って、そのミルナー格子に対応した格子頂点代数の表現を構成する必要があることは明らかである。W 代数に関する部分がかかなり難しい。そこで、コホモロジカルな手法および遮蔽作用素に基づいた Feigin-Frenkel の定義を用いることにした。遮蔽作用素の核を計算することが一般には大変困難であるために、この Feigin-Frenkel の定義の一般化は難しい。Feigin と Frenkel は、W 代数の生成系の存在を示すために量子群の理論を使っている。しかしながら一般には、いまだそのように役立つ理論はその理論はない。ホール代数が量子群のふさわしい一般化であろうという望みもあるが、我々の今の時点でのホール代数の理解は大変限られたものである。またひとつには、Feigin と Frenkel のアプローチの一般化することによりふさわしい W 代数の概念を見つけることを考えている。

## 4. 研究成果

B. Bakalov 氏との共同プロジェクトにおける主な成果は、格子頂点代数のねじれ表現を構成したことである。詳しくは、ミルナー格子の各サイクルに対して無限変数の線型微分作用素を割り当てるということをした。物理学においては、このような作用素はボソン場として知られている。これらの作用素の係数は、原始形式のサイクルに沿った積分周期で与えられる。我々はこれらのボソン場どうしは互いに局所的であり、モノドロミー表現と整合性があることを示した。また頂点代数の一般論から、ミルナー格子に対応する格子頂点代数のねじれ表現を構成することができる。次に我々の結果は、特異点が単純特異点の場合についてである。ミルナー格子の各消滅サイクルに対して、遮蔽作用素を対応させることができる。すべての遮蔽作用素の共通核の元を 1 つ取り、それを全 ancestor ポテンシャルに作用させると、係数が変形パラメーターの解析関数であるような形式的べき級数を得られることが証明できた。周期積分はディスクリミナントに沿って極を持つために、我々の結果は全 ancestor ポテンシャルに対する微分の拘束条件を課す。Feigin-Frenkel の結果によると、すべての遮蔽作用素の共通核は対応する有限ルート系の W 代数であるので、私たちの結果は同値に言い換えられて、特異点の全 ancestor ポテンシャルは W 代数の最高ウェイトベクトルであるということになる。いくつかの場合においては W 代数の生成系は具体的に知られているため、拘束条件は原理的には GW 不変量の計算に使われる。しかしながら、拘束条件から GW 不変量の計算を実行するのに有効なア

ルゴリズムはない。一方で、十年ほど前に Eynard と Orantin がピラソロ拘束条件を解くための大変うつくしいアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは現在、Eynard-Orantin Topological Recursion Relations (TRR)として知られている。TRRは、さまざまな場の量子論における相関関数の計算に素晴らしい応用を持つ。特異点論における相関関数は、ある種の Eynard-Orantin 再帰関係を満たすことが分かる。実際、特異点の変形を持つために、TRR の族を構成することができる。これまでジェネリックな変形に対しては Eynard-Orantin 再帰関係式の構成法がわかっている。その場合には、筆者は Eynard-Orantin 再帰関係式はピラソロ拘束のいくつかのコピーとが同値であることを証明した。そこで、ジェネリックでない変形に対して、TRR の族を構成することが主要な問題となる。筆者は、ジェネリックでない場合の変形の中でジェネリックな場合、すなわち、コースティクス上のジェネリック点に対して TRR の族を構成した。特に、筆者はギーベントールによる 12 年前からの予想に証明をつけることができ、これはいわゆる LG/CY 対応に関する Chiodo-Ruan による予想の中でとりわけ重要な位置をしめる。A 型特異点の場合は、まだ論文の形にまとめていないが、Eynard-Orantin 再帰関係式が特異点の任意の変形に対して成立することを示した。私の現在の目標は TRR と W 拘束との関係を理解することである。筆者は、最も変形が退化した場合の Eynard-Orantin 再帰関係式が W 拘束を解くための再帰関係式になるであろうと期待している。また筆者は単純特異点の場合ならばこの期待が証明できると考えている。Eynard-Orantin 再帰関係式が W 代数の理解そして B. Bakalov 氏との共同研究で得られた W 拘束の一般の特異点への一般化の理解の助けになるのかどうかを問題としたい。最後に、B. Bakalov 氏との共同研究において、特異点論のディスクリミナントに関する結果でその一般化が難しいものがいくつかあった。最近、筆者は、これらの困難を克服して、チャーン類写像とミラー多様体のガンマ類の言葉で周期写像についての明示公式を発見することができた。筆者は、この発見が特異点論だけでなく GW 理論に対しても一般化できると楽観的に考えている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

H. Iritani, T. Milanov, and V. Tonita, "Reconstruction and Convergence in Quantum K-Theory via Difference Equations.", International

Mathematics Research Notices, 印刷中, 査読有

doi: 10.1093/imrn/rnu026

T. Milanov, "Analyticity of the total ancestor potential in singularity theory.", Advances in Mathematics, 255(1), 217-241, (2014), 査読有

doi: 10.1016/j.aim.2014.01.009

B. Bakalov and T. Milanov. "W-constraints for the total descendant potential of a simple singularity.", Compositio Mathematica 149, 840-888 (2013) 査読有

DOI:

<http://dx.doi.org/10.1112/S0010437X12000668>

[学会発表](計 14 件)

Todor Milanov, "Analyticity of the total ancestor potential in singularity theory." Workshop on "B-model aspects of Gromov-Witten theory", アメリカ・ミシガン州アナーバー (University of Michigan), 2014 年 3 月 6 日 (招待講演)

Todor Milanov, "The Eynard-Orantin recursion in singularity theory." Session on "Symplectic geometry and mathematical physics" of the symposium PRIMA 2013, 中国・上海, 2013 年 6 月 24 日 (招待講演)

Todor Milanov, "Integrable hierarchies for hypersurface singularities." Conference on "Singularities of differential equations in algebraic geometry.", フランス・リュミニエール, 2012 年 6 月 4 日 (招待講演)

Todor Milanov, "Period integrals and twisted representations of vertex algebras." Conference on "Integrability in topological field theory", ドイツ・ボン, 2012 年 4 月 16 日 (招待講演)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

MILANOV, Todor

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構・特  
任助教  
研究者番号：80596841

(2)研究分担者  
なし

(3)連携研究者  
なし