

平成 26 年 5 月 18 日現在

機関番号：13101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740008

研究課題名(和文) アフィン代数多様体の構造解明とその応用

研究課題名(英文) Understanding the structure of affine algebraic varieties and its applications

研究代表者

小島 秀雄 (KOJIMA, HIDEO)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：90332824

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：アフィン代数曲面の構造について研究し、アフィン平面の加法群スキームによる作用の分類の別証明を与えたり、非特異部分の対数的小平次元が1となる正規アフィン代数曲面の対数的12種数が正になることを証明した。また、アフィン代数曲面の最近の研究成果を用いて、ピカル数1の正規射影的有理曲面上の補集合のオイラー数がゼロ以下となる曲線を調べたり、ピカル数1の高々有理的対数標準特異点のみを持つ正規デルペッツ曲面に現れる特異点の個数の上限を求めた。その他、一意分解整域上の多項式環の多項式が整閉となるための必要十分条件を得た。

研究成果の概要(英文)：I have studied the structure of affine algebraic surfaces. I gave another proof of the classification of the additive group scheme action on the affine plane and proved that the logarithmic 12th genus of the smooth part of a normal affine surface of logarithmic Kodaira dimension 1 is positive. Moreover, by using some recent results on affine algebraic surfaces, I studied curves on a normal projective rational surface whose complements have non-positive Euler characteristic and gave an upper bound for the number of singular points of a normal del Pezzo surface of Picard number 1 with only rational log canonical singularities. I also gave necessary and sufficient conditions for a polynomial in the polynomial ring over a unique factorization domain to be closed.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何 アフィン代数曲面 対数的小平次元 対数的多重種数 正規デルペッツ曲面 多項式環 高階導分

## 1. 研究開始当初の背景

### (1) 開代数曲面とアフィン代数曲面

開代数曲面の対数的小平次元による構造定理は基礎体の標数がゼロの場合は川又氏、藤田氏、宮西氏、角田氏等により射影代数曲面の場合と類似の形で成立している。開代数曲面に関するこれらの結果はアフィン代数曲面を研究する上で重要であり、現在も代数群のアフィン代数多様体への作用、アフィン代数曲面の埋め込み、アフィン代数多様体の自己同型群、および消去問題等に応用されている。開代数曲面の対数的小平次元による構造定理は基礎体の標数が正の場合にもある程度の修正をすれば成り立つことが期待されている。近年、開代数曲面の極小モデル理論や対数的小平次元がゼロまたは1となる場合の開代数曲面の構造定理等は正標数の場合にも部分的に成り立つことが分かっている。

しかしながら、開代数曲面の対数的小平次元による構造定理は正標数の場合には完全には確立されていない。そのため、正標数のアフィン代数多様体の研究は、標数ゼロの場合に比べると、殆ど進展していない。また、対数的小平次元がゼロ以上の開代数曲面の研究は、小平次元がゼロ以上の非特異射影代数曲面の場合と比べると不十分である。特に、対数的小平次元がゼロ以上の開代数曲面の対数的多重種数や対数的標準写像を調べることは、最初に調べるべき重要な問題であるが、アフィン代数曲面の場合に限っても殆ど研究成果がない。

### (2) 多項式環とその部分代数

多項式環の導分と局所ベキ零導分、およびそれらの変換式環(以後、核と呼ぶ)はアフィン代数幾何学における中心的な研究対象であり、アフィン代数多様体の自己同型群や代数群の作用の研究に応用されている。

標数ゼロの体上の多項式環の導分や局所ベキ零導分の核の研究はここ二十数年でかなり進展してきている。正標数の体上の多項式環では、高階導分や階層的局所有限高階導分が標数ゼロの場合の導分や局所ベキ零導分の類似物であり、ここ数年、それらの核の研究が進んでいる。しかしながら、高階導分の核を調べることは導分の場合に比べて格段に難しく、意味のある結果がまだ少ない。正標数のアフィン代数多様体の構造を研究するためには、多項式環の高階導分や階層的局所有限高階導分の核の研究をもっと推進させる必要がある。

## 2. 研究の目的

任意標数での対数的小平次元による開代数曲面や正規アフィン代数曲面の構造を解明し、この結果を高次元アフィン代数多様体や正規射影代数曲面の構造解明に応用する。より具体的には次の課題について研究を行

う。

### (1) 開代数曲面とアフィン代数曲面

対数的小平次元による開代数曲面と正規アフィン代数曲面の構造定理を正標数の場合にも確立し、更に、そのような曲面の対数的小平次元と対数的多重種数の関係を明らかにする。更に、対数的小平次元が1以上となる開代数曲面の対数的標準写像の解析を行う。

### (2) 正規代数曲面

開代数曲面や正規アフィン代数曲面、特に、 $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面に関する諸結果を用いて、ピカル数1の射影的正规有理曲面の構造を調べる。特に、正規代数曲面の極小モデルとして現れる曲面の中でも重要なクラスである、ピカル数1の正規デルペッソ曲面の構造を解明する。

### (3) 多項式環とその部分代数

多項式環上の高階導分や階層的局所有限高階導分の核の構造を調べ、加法群スキームが作用する正規アフィン代数曲面の構造を解明する。また、多項式環の整閉部分代数について、そのような部分代数が導分や高階導分の核として表される条件を得る。

## 3. 研究の方法

### (1) 開代数曲面とアフィン代数曲面

開代数曲面と正規アフィン代数曲面について、以下のような方法で研究を遂行した。

1 対数的小平次元がゼロ以上となる開代数曲面の極小モデルを構成する。この理論自体は既に完成しているが、極小モデルの対数的多重種数をより詳しく調べるためには、更に、その対数的多重種数を変えない範囲で、第1種例外曲線をブローダウンしていく必要がある。また、アフィン代数曲面の場合は、その極小モデルの構成において、ブローダウンする第1種例外曲線とその曲面の境界因子との交わり方の可能性も調べる。

2 1で得られた極小モデルの対数的多重種数を調べる。対数的小平次元が1の場合は、研究代表者によって得られている開代数曲面の構造定理を用いて、対数的 $n$ 種数が正となる自然数 $n$ の値の下限を調べる。更に、正規アフィン代数曲面の場合は、12以下の自然数 $n$ に対して、対数的 $n$ 種数がゼロとなるものを構成できるかどうかを調べる。対数的小平次元が2の場合については、対数的 $n$ 種数の下限を対数的標準因子から作られる因子の交点数の情報により与え、その次に、曲面が非特異アフィン代数曲面の場合に、その下限が正になるような自然数 $n$ の値を調べる。

### (2) 正規代数曲面

ピカル数1の正規射影的有理曲面 $X$ について、以下のような方法で研究を遂行した。

1  $X$ の標準因子がネフでない、つまり、 $X$ が

正規デルペッツ曲面となる場合に、 $X$  の構造を調べる。その反標準因子との交点数が最小の値をとる曲線  $C$  をとり、 $X$  から  $C$  を除いた集合  $S$  が  $Q$ -ホモロジー平面になることを利用して、 $X$  が対数的末端特異点でない特異点を持つ場合や  $X$  の特異点の個数が多い場合を中心に、 $X$  の構造を調べる。

2  $X$  上の曲線  $D$  について、 $X$  から  $D$  を除いた集合の代数的あるいは位相的性質が特殊になる場合について、対応する性質を持つ正規アフィン代数曲面に関する結果を利用しながら、 $X$  や  $D$  の性質を調べる。

### (3) 多項式環とその部分代数

多項式環とその部分代数について、以下のような方法で研究を遂行した。

1 2変数多項式環上の局所有限高階導分の核の環論的性質を調べる。更に、その核を生成する多項式がその多項式環の座標となるかどうか調べる。

2 1の考察を用いて、2変数多項式環上の局所有限高階導分の分類を行う。更にその結果を用いて、アフィン平面上の加法群スキームの作用を調べる。

3 整域上の多項式環内の1個の多項式で生成される部分代数について、その整閉性と生成元となる多項式との関係について調べる。

### (4) 研究集会

年1回の高知大学での研究集会(福岡慶明氏(高知大学教授)との共催)、年2回の関西学院大学での研究集会(増田佳代氏(関西学院大学教授)、岸本崇氏(埼玉大学准教授)との共催)に主催者として参加した。研究代表者自身の研究発表を行うとともに、外部の研究者を講演者として招聘した。上記の研究課題を遂行するために、アフィン代数多様体や射影代数多様体に関する最新の研究成果の情報収集と研究打ち合わせを行った。

多項式環論については、黒田茂氏(首都大学東京准教授)と谷本龍二氏(静岡大学准教授)と定期的に研究連絡を行った。また、多項式環論に関するセミナーを定期的に開催し、研究発表と研究打ち合わせを行った。

## 4. 研究成果

本研究で得られた成果を研究の目的での項目毎に分けて書く。

### (1) 開代数曲面とアフィン代数曲面

対数的小平次元がゼロ以上となる開代数曲面と正規アフィン代数曲面について、次のような成果を得た。

1 研究代表者が以前確立した任意標数での対数的小平次元が1の開代数曲面の構造定理と線織曲面上の曲線の解析を用いることにより、非特異部分の対数的小平次元が1となる正規アフィン代数曲面の対数的多重種数を調べ、そのような曲面の対数的12種数が正になることを示した。更に、対数的小平

次元が1の非特異アフィン代数曲面の対数的2種数が正になることを示した。これらの結果は、対数的小平次元が1の正規アフィン代数曲面の構造を調べるために需要になってくると思われる。

2 正標数での対数的小平次元が2の非特異アフィン代数曲面の対数的 $n$ 種数について研究し、その対数的 $n$ 種数が正となる自然数 $n$ の値を、その曲面の対数的標準因子のZariski分解より求めることができる値で表すことができた。標数ゼロの場合には、角田氏により、そのような曲面の対数的12種数が正になることが証明されている。今回得られた結果は、そのような自然数 $n$ の最小値を与えてはいないし、曲面に共通の値を求めている訳ではないが、正標数では川又-Viehweg消滅定理が必ずしも成立しないので、部分的な結果が得られただけでも十分インパクトがあると思われる。

### (2) 正規代数曲面

ピカル数1の正規射影代数曲面の構造を、アフィン代数曲面に関する最近の研究成果を用いながら調べ、次のような成果を得た。

1 研究代表者が以前確立したオイラー数がゼロ以下となる正規アフィン代数曲面の構造定理を用いて、ピカル数1の正規射影的有理曲面上の曲線について、その曲線の補集合のオイラー数がゼロ以下であるとすると、その曲線の各既約成分は有理曲線になることを証明した。これは射影平面内の曲線の場合にはA. J. de Jong氏とJ. H. M. Steenbrink氏によって得られていたが、これを一般化した。

2 高橋剛氏(長岡高専准教授)と共同で、ピカル数1の高々有理的対数的標準特異点を持つ正規デルペッツ曲面のうち、特異点の個数が大きい場合を調べた。これまでの研究で得られていた、そのような曲面の特異点の個数が5以下であることの証明を、K. Palka氏による最近の $Q$ -ホモロジー平面の研究成果を用いることにより簡略化し、かなり見通しの良い証明を得た。また、この結果の証明の途中の議論で、IIa型というクラスに属するものを全て分類した。更に、特異点の個数が最大の5となる場合を全て分類した。その他、特異点の個数が4となる場合やIIb型のクラスに属する場合についても研究を遂行し、部分的な分類結果を得た。ピカル数1の正規デルペッツ曲面は正規完備代数曲面の極小モデルとして現れるもので、このクラスの曲面の分類を行うことは重要である。また、対数的末端特異点でない特異点を持つものはCox環が有限生成とならない正規代数曲面の興味深い例になると思われる。

### (3) 多項式環とその部分代数

多項式環の導分や階層的局所有限高階導分の核、および、多項式環の整閉な部分代数に関して、次のような成果を得た。

1 UFD (一意分解整域) 上の多項式環内の定数多項式でない1個の多項式で生成される部分代数の性質を調べ、次のような結果を得た。まず、定数多項式でない1個の多項式で生成される部分代数の族について、その族の元が包含関係で極大であることとその族の元が多項式環内において整閉でかつその生成元となる多項式の係数の最大公約元が1になることが同値であることを証明した。更に、多項式環の係数環の標数がゼロとなる場合は、そのことと、その部分代数がある導分の核として表されることが同値であることを証明した。これらの結果は体上の多項式環の場合には知られているが、それを一般化した。

2 体上の多項式環における階層的局所有限高階導分について、まず、標数ゼロのときの局所ベキ零導分の場合と同じようにして、階数の概念を定義し、階数が1となる場合を調べた。更に、その結果と A. Sathaye 氏と P. Russell 氏による体上の多項式環の変数多項式の結果を用いることにより、任意標数の体上の2変数多項式環の階層的局所有限高階導分を分類した。この結果は標数ゼロの体上の場合は R. Rentschler 氏により、任意標数の代数閉体上の場合は宮西氏により証明されているが、それを一般化した。正標数の体では代数閉体の場合に成り立つ結果が代数閉体でない場合にも成り立つとは限らず、この結果は宮西氏の結果より従うとは限らない。Rentschler 氏の結果はとても基本的であるが応用範囲の広い重要な結果であり、この結果も今後更なる応用が期待できる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5件)

1 Masaya Kato and Hideo Kojima, Closed polynomials in polynomial rings over unique factorization domains, Communications in Algebra, 掲載決定, 査読有.

2 Hideo Kojima, Open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension one, Affine Algebraic Geometry, Proceedings of the Conference, Osaka, Japan 3-6 2011, 巻なし, 2013, 135-159, 査読有.

3 Hideo Kojima, Supplement to "Normal del Pezzo surfaces of rank one with log canonical singularities" by H. Kojima and T. Takahashi [J. Algebra 360 (2012) 53-70], Journal of Algebra, vol. 377, 2013, 312-316, 査読有. DOI: 10.1016/j.jalgebra2012.11.028

4 Hideo Kojima, Normal affine surfaces with non-positive Euler characteristic, Saitama Mathematical Journal, vol. 29, 2012, 65-70, 査読有. URL:

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/research/pdf/smj29-4.pdf>

5 Hideo Kojima and Takeshi Takahashi, Normal del Pezzo surfaces of rank one with log canonical singularities, Journal of Algebra, vol. 360, 2012, 53-70, 査読有. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.02.026

[学会発表](計 8件)

1 小島秀雄, Open algebraic surfaces of logarithmic Kodaira dimension zero, 第12回アフィン代数幾何学研究集会, 2013年9月7日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス.

2 小島秀雄, ピカール数1の正規 del Pezzo 曲面について, 第4回代数曲面ワークショップ at 南大沢, 2013年8月4日, 首都大学東京.

3 小島秀雄, 対数的小平次元がゼロとなる開代数曲面とある種のアフィン曲面の特徴付け, 代数幾何ミニ研究集会, 2013年3月27日, 埼玉大学.

4 小島秀雄, 開代数曲面の対数的多重種数について, 射影多様体の幾何とその周辺 2012, 2012年10月8日, 高知大学.

5 Hideo Kojima, Logarithmic plurigenera of some normal affine surfaces, International Conference on Affine Algebraic Geometry and Related Topics, 2012年8月1日, Jilin University, 中国.

6 小島秀雄, Remarks on normal del Pezzo surfaces of rank one, 第9回アフィン代数幾何学研究集会, 2012年3月2日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス.

7 小島秀雄, Logarithmic plurigenera of some open algebraic surfaces, 第8回アフィン代数幾何学研究集会, 2011年9月4日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス.

8 小島秀雄, ピカール数1の正規デルペゾ曲面について, 津山代数幾何シンポジウム 2011, 2011年7月27日, 津山工業高等専門学校.

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:

種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小島 秀雄 (KOJIMA HIDEO)

研究者番号：9 0 3 3 2 8 2 4

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：