

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 3 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740010

研究課題名(和文)代数曲面の自己同型とその広がり

研究課題名(英文)Automorphisms of algebraic surfaces and its applications

研究代表者

大橋 久範(Ohashi, Hisanori)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：40547006

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：(複素)射影空間内で、多項式を使って定義された図形を代数多様体という。二次元の代数多様体の中でも特に良い性質を持つ、K3曲面とエンリケス曲面について、それらの対称性を記述する自己同型群を中心に研究した。これは図形や方程式の対称性という側面とともに、代数幾何で現れる良い性質の曲面と群論の中で現れる良い性質の有限群が結びついているという抽象群の射影幾何による実現という側面も持つ。

研究成果の概要(英文)：An algebraic variety is a geometric structure which is defined by polynomials in (complex) projective spaces. Among two-dimensional algebraic varieties, I studied K3 surfaces and Enriques surfaces which are generally considered to have good properties, from the viewpoint centered at their automorphism groups. One fundamental aspect of this study is the symmetry of the varieties and its equations. The other aspect would be that it relates good properties of algebraic surfaces to abstract groups, resulting in the realization of abstract groups.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数曲面 K3曲面 エンリケス曲面 正則シンプレクティック多様体 自己同型

1. 研究開始当初の背景

代数多様体 X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ や、少し一般に射の集合 $\text{Mor}(X, Y)$ は基本的かつきわめて重要な不変量である。例えば、 X がコンパクトリーマン面の場合に自己同型群を見れば、小平次元が非正の場合には X が復元できる。小平次元が正の場合には群が小さくなり多様体は復元できないが、今度は多くの多様体の中から興味深い性質を持つものを”見分ける”ための一つの指標としての役割を果たしている側面がある。

このような事情は複素二次元においても同様で、今までの研究の中で特に $K3$ 曲面の場合に興味深い現象が現れることが知られている。 $K3$ 曲面の自己同型については Nikulin(1980) による基礎づけの後、向井(1988)により有限シンプレクティック自己同型群と散在型有限単純群であるマシュー群 M_{24} の関係が群の指標理論を用いて明らかにされた。この結びつきは金銅(1998)により格子論的方法で、Xiao(1996)が組み合わせトポロジーの方法でコンピュータの助けを経由して再証明されている。さらに Dolgachev-Keum(2009)においては、この有限シンプレクティック自己同型群がマシュー群に埋め込めるという定理が正標数(11以上)に拡張された。他の方向においても、金銅(1999)、小木曾-Keum-Zhang(2005)、Frantzen(2009)などにより極大群作用の非シンプレクティック群への拡張とその一意性が議論されてきた。更なる拡張として、金銅(1998)においては Leech 格子の幾何を用いて一般ヤコビアンクンマー曲面の全自己同型群の生成系を明示的に求めるという Klein の問題が解決された。Dolgachev-金銅(2003)においては標数 2 の超特異 $K3$ 曲面の自己同型群が計算された。また、筆者のプレプリント(RIMS-preprint 1696)においてはマシュー群の作用を応用して標数 11 の超特異楕円 $K3$ 曲面のモデル・ヴェイユ格子を調べ、格子点の数え上げに応用した。

このような自己同型群を媒介にした一連の結果をさらに拡張するという動機、また特にエンリケス曲面については自己同型の研究が少ないことが研究の背景であった。

2. 研究の目的

$K3$ 曲面やエンリケス曲面といった特別に面白い自己同型を持つ、あるいは持つことが予想される代数曲面に着目し、その自己同型の分類を目指すとともに、そこから自然に導かれる特別な性質を持った多様体について、特異点、モジュライ、古典射影幾何や有限群論等の観点から調べるのがこの研究の目的である。

中でもエンリケス曲面については、一般論が整備され、 $K3$ 曲面と関係が深いことが一

目瞭然であるにもかかわらず、有限自己同型群の組織的研究はほとんどなされていなかった。エンリケス曲面は $K3$ 曲面とその上の自由対合を一つ与えることで定まり、代数曲面の分類論の上でも一つの重要なクラスをなす。エンリケス曲面の自己同型については、生成的な場合における全自己同型群の計算(Barth-Peters 1983)、全自己同型群が有限群になるようなエンリケス曲面の射影幾何的構成と分類(金銅 1986)、数値的自明な自己同型の分類(向井-浪川 1984)などがあり、どれも $K3$ 曲面の場合とは対照をなす。

$K3$ 曲面と類似しているエンリケス曲面において有限自己同型の分類が知られておらず、いくつかの場合にはエンリケス曲面が $K3$ 曲面と非常に異なった振る舞いをすることから、エンリケス曲面の有限自己同型群の分類とそのモジュライの記述、関連した群論や多様体の研究は道の豊富な数学的内容を生み出す可能性が十分にある。本研究は極大有限自己同型群を分類し、多く構成し、モジュライ空間をできるだけ具体的に記述することを目標とする。

3. 研究の方法

群作用の分類問題の定式化は次のようなものである。

- (1) 様々なエンリケス曲面に作用し得る、有限群 G の分類を行え。
- (2) (1) に現れる群の、群論的あるいは組み合わせ論的な特徴付けを与えよ。
- (3) 群 G を固定したうえで、 G 作用を持つようなエンリケス曲面を分類せよ。
- (4) (3) において、一般元を射影幾何的に実現せよ。また、モジュライを記述し、退化や正標数への応用を考えよ。

上でエンリケス曲面を $K3$ 曲面に変えたものも(かなりの部分で満足のいく結果が得られているが)一部未解決である。

筆者が念頭に置く $K3$ 曲面やエンリケス曲面の場合には、周期写像の理論を用いて、モジュライ空間がコホモロジー格子への作用から(少なくとも抽象的には)記述される。従って、問題の本質的な部分は有限群 G の分類と、その射影実現である。分類を実現するためのアイデアとして、まず G を半シンプレクティック部分とそうでない部分に分ける。 $K3$ 曲面においても非シンプレクティック部分の多様性はまだ解決されていないことを思い出すと、半シンプレクティック部分の分類が第一の目標である。この場合、群の元の位数は 6 以下であることが比較的容易にわかり、従って群の位数を割り切る素数は 2, 3, 5 のどれかしかなし。

まずは位数 5 の巡回群について詳細に研究する。この場合には商曲面がエンリケス曲

面になることから、モジュライを計算でき、有理曲面のログ変換として実現できることを示すことができる。

G が非可解群の場合、その位数は5で割り切れるので、エンリケス曲面は上で記述できたモジュライの中に属し、自己同型群を上から押さえることができると予想する。 G が可解群の場合には、正規部分群 H をとってきて中間商を考えるとという Nikulin, Xiao らの手法をまねることで、($K3$ 曲面と異なる部分も多いものの) 群の構造を細分することができ、最終的には分類にたどり着けるのではないかと考えている。

4. 研究成果

論文7. では、ヤコビアンクンマー曲面上の Hutchinson-Weber 対合の退化について調べた。論文6. では、瀧と Artebani-Sarti によりそれぞれ分類された $K3$ 曲面上の位数3の非シンプレクティック自己同型を用いて、条件付きでの指数3の log del Pezzo 曲面の部分的分類を与えた。この条件は smooth multiple divisor property と名付けられ、自己同型としては楕円型というものに対応する。特に、ピカル数1の log del Pezzo 曲面をいくつか構成できた。その後の調べで、これらの例は小島、Zhang らの研究の中に現れるものと一致することがわかったが、それでもこれらの曲面の新しい性質を見出した点で意味がある。さらに最近、指数3の log del Pezzo 曲面の完全な分類が藤田-安武により与えられたことは特筆すべきである。論文6. での特異点の分類が彼らの研究でも有効に用いられている。

論文5. では、上記の位数3の非シンプレクティック自己同型の分類と、馬によるモジュライ空間の有理性の証明を組み合わせ、位数3の非シンプレクティック自己同型を持つ $K3$ 曲面のモジュライ空間の有理性について研究した。結果、多くの場合に有理性が成り立つことが証明できた。

論文4. では Hutchinson-Goepel 型のエンリケス曲面について調べた。射影幾何的構成と6次曲面表示を詳細に調べ、マシュー型自己同型を用いて特徴づけを与えた。マシュー型の有限自己同型群については、最近書きあがったプレプリントにおいて、複素数体上と正標数で穏やかな群作用の場合にも完全な分類定理を証明したことを追記しておく。

論文3. ではエンリケス曲面上の対合の分類をした。方法としては対合を $K3$ 曲面に持ち上げて格子理論に帰着させる。エンリケス曲面の自己同型の多様性の大部分が対合から現れていると思われることから、この分類は非常に基礎的な結果である。

論文2. では4次対称 $K3$ 曲面を割って得られるエンリケス曲面の全自己同型群を計

算した。証明はピカル格子への作用を双曲空間に働く離散群とみなし、コクセター群の理論を援用するもので、金銅による全自己同型群が有限になる場合の証明の拡張である。

論文1. においては、エンリケス曲面の研究において現れたいくつかの例が Gorenstein Q -homology plane になっていることを見出し、その分類の一部として射影実現の例に用いた。この研究は現在も Schuett らにより拡張されている最中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 7 件)

1. D. Hwang, J. Keum and H. Ohashi, Gorenstein Q -homology projective planes, *Sci. China Math.* 58 (2015), 501-512. (査読あり) DOI: 10.1007/s11425-015-4978-4

2. S. Mukai and H. Ohashi, The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, to appear in *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 417, 'Recent advances in Algebraic geometry' (査読あり)

3. H. Ito and H. Ohashi, Classification of involutions on Enriques surfaces, *Michigan Math. J.*, 63 (2014), 159-188. (査読あり)

4. S. Mukai and H. Ohashi, Enriques surfaces of Hutchinson-Goepel type and Mathieu automorphisms, in 'Arithmetic and Geometry of $K3$ surfaces and Calabi-Yau threefolds', *Fields institute Communications* 67 (2013), 429-454. (査読あり) DOI:10.1007/978-1-4614-6403-7_15

5. S. Ma, H. Ohashi and S. Taki, Rationality of the moduli spaces of Eisenstein $K3$ surfaces, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*, electronically published in 2015 (査読あり) <http://dx.doi.org/10.1090/tran/6349>

6. H. Ohashi and S. Taki, $K3$ surfaces and log del Pezzo surfaces of index three, *Manuscripta Math.*, 139 (2012), 443-471. (査読あり) DOI:10.1007/s00229-011-0524-z

7 . H. Ohashi,
Hutchinson-Weber involutions degenerate
exactly when the Jacobian is Comessatti,
Publ. Res. Inst. Math. Sci., 48 (2012),
107-127. (査読あり) DOI:10.2977/PRIMS/63

[学会発表] (計 25 件)

- 1 . H. Ohashi, Finite groups of automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M12, String, lattice and moonshine, 立教大学 (東京都豊島区) 2014 年 12 月 4 日、口頭発表
- 2 . H. Ohashi, The automorphism groups of Enriques surfaces covered by symmetric quartic surfaces, K3, Enriques surfaces and related topics, 名古屋大学 (愛知県名古屋市) 2014 年 11 月 10 日、口頭発表
- 3 . H. Ohashi, (Non-)semi-symplectic automorphisms of Enriques surfaces, 射影多様体の幾何とその周辺 2014, 高知大学 (高知県高知市) 2014 年 11 月 2 日、口頭発表
- 4 . H. Ohashi, Non-semi-symplectic automorphisms of Enriques surfaces, 第八回玉原特殊多様体研究集会、東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市) 2014 年 9 月 18 日、口頭発表
- 5 . H. Ohashi, Non-semi-symplectic automorphisms of Enriques surfaces, 第二回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ、旭川市大雪クリスタルホール (北海道旭川市) 2014 年 8 月 30 日、口頭発表
- 6 . H. Ohashi, K3 曲面の自己同型と Mathieu 群についてのサーベイ、マシュームーンシャインに関する勉強会、東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市) 2014 年 8 月 26 日、口頭発表
- 7 . H. Ohashi, Non-semi-symplectic automorphisms of Enriques surfaces, Mini-workshop on Calabi-Yau varieties: Arithmetic Geometry and Physics, 津田塾大学 (東京都小平市) 2014 年 8 月 7 日、口頭発表
- 8 . H. Ohashi, Non-semi-symplectic automorphisms of Enriques surfaces, 第七回代数曲面ワークショップ at 秋葉原、首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス (東京都千代田区) 2014 年 7 月 19 日、口頭発表
- 9 . H. Ohashi, 4 次対称 K3 曲面から決まるエンリケス曲面の自己同型群の決定、日本数学会、学習院大学 (東京都豊島区) 2014 年 3 月 15 日、口頭発表
- 10 . H. Ohashi, The automorphism groups of the Enriques surfaces covered by some symmetric quartic K3 surfaces, Moduli and self-maps, 京都大学 (京都府京都市) 2014 年 3 月 7 日、口頭発表
- 11 . H. Ohashi, On some lattice of interest related to the prime eleven, 玉原特殊多様体研究集会、東大玉原国際セミナーハウス (群馬県沼田市) 2013 年 9 月 11 日、口頭発表
- 12 . H. Ohashi, 複素 K3 曲面の変形とモジュライと自己同型について、K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ、北海道大学 (北海道札幌市) 2013 年 8 月 23 日、口頭発表
- 13 . H. Ohashi, Integral points of some elliptic curve via the binary Golay code, Beyond the Moonshine, ホテル華の湯 (宮城県仙台市) 2013 年 7 月 9 日、口頭発表
- 14 . H. Ohashi, The rationality of moduli spaces of Eisenstein K3 surfaces, New Trends in Arithmetic and Geometry of Algebraic Surfaces, Centre International de Rencontres Mathematiques (ルミニ・フランス) 2013 年 3 月 13 日、口頭発表
- 15 . H. Ohashi, On automorphisms of Enriques surfaces, Arithmetic and Algebraic Geometry 2013, 東京大学 (東京都目黒区) 2013 年 1 月 29 日、口頭発表
- 16 . H. Ohashi, On automorphisms of K3 surfaces and Enriques surfaces, Research seminar Algebraic and Arithmetic Geometry, Leibniz Universitaet Hannover (ハノーバー・ドイツ) 2012 年 8 月 28 日、口頭発表
- 17 . H. Ohashi, ある関数体上の楕円曲線の整点のマシュー群を用いた数え上げ、談話会、愛媛大学 (愛媛県松山市) 2012 年 7 月 17 日、口頭発表
- 18 . H. Ohashi, ある関数体上の楕円曲線について、代数セミナー、東京理科大学 (千葉県野田市) 2012 年 7 月 6 日、口頭発表
- 19 . H. Ohashi, K3 曲面やエンリケス曲面の有限対称性の分類、代数幾何講演会、埼玉大学 (埼玉県さいたま市) 2012 年 7 月 3 日、口頭発表
- 20 . H. Ohashi, Automorphisms of the octahedral Enriques surface, 高次元代数幾何の周辺、京都大学 (京都府京都市) 2012 年 6 月 12 日、口頭発表
- 21 . H. Ohashi, Log del Pezzo surfaces of index three with multiple smooth divisors, 第 9 回アフィン代数幾何学研究集会、関西学院大学大阪梅田キャン

ンパス(大阪府大阪市) 2012年3月2日、口頭発表

2.2 . H. Ohashi, エンリケス曲面上の対称の分類、エンリケス曲面の自己同型群の分類について、複素幾何セミナー(2回) 首都大学東京(東京都八王子市) 2011年12月9日、口頭発表

2.3 . H. Ohashi, On automorphism groups of Enriques surfaces, 城崎代数幾何学シンポジウム、城崎大会議館(兵庫県豊岡市) 2011年10月26日、口頭発表

2.4 . H. Ohashi, On automorphism groups of Enriques surfaces, 代数幾何ワークショップ2011, 法政大学(東京都小金井市) 2011年9月8日、口頭発表

2.5 . H. Ohashi, On automorphisms of Enriques surfaces, Workshop on Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, Fields Institute, University of Toronto(トロント・カナダ), 2011年8月19日、口頭発表

(2)研究分担者 ()

研究者番号:

(3)連携研究者 ()

研究者番号:

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/oh/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

大橋 久範 (Ohashi Hisanori)
東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号: 40547006