

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740015

研究課題名(和文) 保型形式に付随する  $p$  進  $L$  関数と  $p$  進周期の研究研究課題名(英文) Study on  $p$ -adic  $L$ -functions and  $p$ -adic periods for modular forms

## 研究代表者

千田 雅隆 (Chida, Masataka)

京都大学・白眉センター・助教

研究者番号：00451518

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：この研究では楕円保型形式に付随する( $p$ 進) $L$ 関数の特殊値や( $p$ 進)周期の性質を調べ、岩澤主予想やBeilinson予想の研究を行なった。その結果、M.-L. Hsieh氏との共同研究により楕円保型形式に対して反円分的 $p$ 進 $L$ 関数を構成し、反円分的岩澤主予想の片方の包含関係を多くの場合に示した。またF. Brunault氏との共同研究により、楕円保型形式のRankin-Selberg積に対するBeilinson予想についての結果を得た。また近藤智氏、山内卓也氏と共同で関数体上の $GL(2)$ 型の曲線に対する $K$ 群の研究を行ない、boundary写像の全射性に関する結果を示した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we investigated properties of special values of ( $p$ -adic)  $L$ -functions and ( $p$ -adic) periods associated to elliptic modular forms. Moreover we studied Iwasawa main conjecture and Beilinson conjecture. In joint work with M.-L. Hsieh, we constructed anticyclotomic  $p$ -adic  $L$ -functions for elliptic modular forms and showed one-sided divisibility of anticyclotomic Iwasawa main conjecture under mild assumptions. Through joint research with F. Brunault, we also showed a weak version of Beilinson conjecture for Rankin-Selberg products of elliptic modular forms. Furthermore, in joint work with Satoshi Kondo and Takuya Yamauchi, we studied algebraic  $K$ -group of curves of  $GL(2)$ -type over function fields and proved a result on surjectivity of boundary maps.

研究分野：整数論

 キーワード：岩澤理論  $p$ 進 $L$ 関数 保型形式 Beilinson予想 Rankin-Selberg  $L$ 関数 regulator写像 Beilinson-F  
lachs元

1. 研究開始当初の背景

整数論における重要な研究テーマの一つとしてゼータ関数の性質の研究が挙げられ、特にゼータ関数・ $L$  関数の特殊値の記述は主要な問題の一つであると考えられる。代数体の Dedekind ゼータ関数に対する類数公式は最も基本的な結果といえる。このテーマに関連する、現在知られている最も有名な予想の一つとして、楕円曲線の Mordell-Weil 群の rank と付随する  $L$  関数の中心点での零点の位数の一致を期待する Birch, Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) が挙げられる。BSD 予想に関しては Coates-Wiles, Gross-Zagier, Kolyvagin, Waldspurger などの仕事により  $L$  関数の中心点での零点の位数が 1 以下の場合については結果が知られているが一般には現在でも未解決である。1986 年に Mazur, Tate, Teitelbaum は素数  $p$  で通常還元を持つ有理数体上の楕円曲線に対し、BSD 予想の  $p$  進類似にあたる予想を提出した ( $p$  進 BSD 予想)。彼らは楕円曲線が素点  $p$  で良い還元を持つときは有理数体上の楕円曲線に付随する円分  $p$  進  $L$  関数の中心点での零点の位数と楕円曲線の Mordell-Weil 群の rank が一致し、分裂乗法的還元を持つときは  $p$  進  $L$  関数の零点の位数が一つ大きくなると予想している。この分裂乗法的還元を持つときに生ずる零点は例外的零点と呼ばれている。さらに彼らは楕円曲線が  $p$  で分裂乗法的還元を持つとき、その  $p$  進  $L$  関数の中心点での一階微分値は  $L$ -不変量と通常の  $L$  関数の中心値を周期で割ったもの ( $L$  関数の特殊値の代数的部分) の積で表わされると予想している。これが例外的零点予想と呼ばれるものである。この予想は Greenberg と Stevens によって 1993 年に解決されている。その後、この予想は一般の重さの保型形式に拡張され、加藤-栗原-辻, Colmez, Stevens らにより解決されている。一般の重さの保型形式に対しては Teitelbaum, Coleman, Mazur らにより様々な  $L$ -不変量が定義されており、楕円保型形式の場合はそれらが一致することが知られている。C.-P. Mok 氏と J. Park 氏と当該研究者の共同研究により、Teitelbaum による  $L$ -不変量は Hilbert 保型形式の場合へ一般化された。さらに Bertolini-Darmon らにより有理数体上の楕円曲線に対する反円分的  $p$  進  $L$  関数の構成も行われ、反円分的  $p$  進  $L$  関数についても  $p$  進 BSD 予想や岩澤主予想の研究が行われているが、一般の重さの保型形式の場合はあまり調べられてこなかった。

2. 研究の目的

本研究では保型形式に付随する様々な  $p$  進  $L$  関数の特殊値及び  $p$  進周期の研究を行い、岩澤理論や Bloch-加藤予想へ応用したいと考えている。より具体的な目的としては次の

のが挙げられる。

- (1) Hilbert 保型形式の場合に Teitelbaum 型の  $L$ -不変量とその他の  $L$ -不変量との関係を明らかにすること。
- (2) より一般の重さの保型形式に対する反円分的  $p$  進  $L$  関数の構成を行い、特殊値に関する予想を定式化すること。
- (3) 志村曲線上の久賀-佐藤多様体の上の Heegner cycle の研究を行い、( $p$  進) $L$  関数の特殊値に関する問題へ応用すること。
- (4) より一般の多変数保型形式の場合への一般化。

3. 研究の方法

研究目的の欄で挙げた(1)~(4)については次のような方向性で取り組んでいく予定である。まず(1)の研究に関しては特に Hilbert 保型形式に対する Teitelbaum 型の  $L$ -不変量と  $p$  進 Hodge 理論を用いて定義される Fontaine-Mazur 型の  $L$ -不変量の比較を行い、Hilbert 保型形式に対する例外的零点予想を扱いやすい場合に帰着させて証明したいと考えている。(2)の研究については Bertolini-Darmon による反円分的  $p$  進  $L$  関数の構成を一般化し、通常の  $L$  関数の特殊値との関係(interpolation property)など様々な性質を調べたいと考えている。(3)については志村曲線上の久賀-佐藤多様体の上に構成される Heegner cycle を用いて Euler system を作ることで、保型形式に対する  $L$  関数の特殊値に関する Bloch-Kato 予想の特別な場合を証明したいと考えている。そのために  $L$  関数の特殊値と cycle の関係を記述する必要があり、vanishing cycle の理論を用いることで解決したいと考えている。(4)については特に unitary 群の保型形式(Hermite 保型形式)の場合に一般化したいと考えている。

4. 研究成果

研究目的の(2)について、国立台湾大学の Ming-Lun Hsieh 氏と共同研究を行い、Bertolini-Darmon による反円分的  $p$  進  $L$  関数の構成を重さが偶数の楕円保型形式の場合に一般化し、古典的な  $L$  関数の特殊値との関係(補間性質)を一般的に証明した。この結果は楕円保型形式に対する反円分的  $p$  進  $L$  関数の場合に例外的零点予想の研究を行った Bertolini-Darmon-Iovita-Spiess による予想の解決を含んでおり、(1)の例外的零点予想の研究とも関連している。さらに Hsieh 氏との共同研究において、反円分的岩澤  $\mu$  不変量についての Vatsal の結果を重さが偶数の保型形式の場合に一般化し、反円分的  $p$  進  $L$  関数から定まる岩澤  $\mu$  不変量が多くの場合に零になることを証明した。この結果は Skinner による乗法的還元を持つ素点での楕円曲線の岩澤主予想の研究でも使われている。この研究成果は論文にまとめられ、現在投稿中である。Ming-Lun Hsieh 氏とは引き続き、楕円保型形式に対する反円分的岩澤主予想に

ついでに共同研究を行い、素数  $p$  で良い通常還元をもつ偶数の重さの楕円保型形式に対して、比較的緩い仮定の下で反円分的  $p$  進  $L$  関数によって生成される ideal が対応する Selmer 群の特性 ideal に含まれるという結果を得ることができた。この結果は有理数体上の楕円曲線の場合に反円分的岩澤予想に関して同様の結果を証明した Bertolini-Darmon による仕事の楕円保型形式の場合への一般化となっている。研究目的の(3)に関して、志村曲線上の久賀-佐藤多様体上の Heegner cycle についても研究を行ない、Heegner cycle から構成される Euler system を用いることで保型形式と Hecke 指標から定まる Rankin-Selberg  $L$  関数に対する Bloch-加藤予想の特別な場合を示した。さらにフランスの Lyon 高等師範学校の Francois Brunault 氏と二つの楕円保型形式に付随する Rankin-Selberg  $L$  関数の特殊値に関する Beilinson 予想についての共同研究を行った。Beilinson 予想は代数多様体の代数的  $K$  群から Deligne コホモロジーへの regulator 写像と non-critical な整数点における  $L$  関数の特殊値の関係を述べた予想であり、楕円保型形式の Rankin-Selberg  $L$  関数の場合は Beilinson によって regulator の計算結果が知られている。Brunault 氏との共同研究において、regulator 写像についての計算結果を一般の重さの保型形式の組に対して拡張し、(弱い形の)Beilinson を証明することができた。また、近藤智氏及び山内卓也氏との共同研究により、関数体上の  $GL(2)$  型の曲線に対する第二次有理  $K$  群についての研究を行ない、局所化完全系列における boundary 写像の全射性を証明した。これは近藤氏と安田氏による楕円曲線の  $K$  群についての結果の一般化になっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Masataka Chida, Hidenori Katsurada and Kohji Matsumoto, On Fourier coefficients of Siegel modular forms of degree two with respect to congruence subgroups, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg* 84 (2014), 31-47.

DOI:10.1007/s12188-013-0087-x

Masataka Chida, Satoshi Kondo and Takuya Yamauchi, On the rational  $K_2$

of a curve of  $GL_2$  type over a global field of positive characteristic, *Journal of K-Theory* 14 (2014), 313-342.

DOI:10.1017/is014006024jkt272

Masataka Chida, Chung Pang Mok and Jeehoon Park, On Teitelbaum type  $L$ -invariants of Hilbert modular forms attached to definite quaternions, *Journal of Number Theory* 147 (2015), 633-665.

DOI:10.1016/j.jnt.2014.08.012

Masataka Chida, Indivisibility of central values of  $L$ -functions for modular forms, *Proceedings of the American Mathematical Society* 143 (2015), 2829-2840.

DOI:10.1090/S0002-9939-2015-12503-8

Masataka Chida and Ming-Lun Hsieh, On the anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, *Compositio Mathematica* 151 (2015), 863-893.

DOI:10.1112/S0010437X14007787

[学会発表](計 35 件)

千田雅隆, 楕円曲線の  $p$  進  $L$  関数と  $p$  進周期, 京都大学談話会, 2011年6月15日, 京都大学理学研究科数学教室.

千田雅隆, 井草多様体の point counting, 第二回  $GL(n)$  の保型表現論 夏の学校, 倉敷シーサイドホテル, 2011年8月26日.

千田雅隆, 連続講演「 $L$ -functions and rational points on elliptic curves」(計5回), TIMS mini course in Number Theory, National Taiwan University, September 26~29, 2011.

千田雅隆, Steinberg representation and  $p$ -adic periods, 数論的表現論研究会, 2012年1月29日, 定山溪.

千田雅隆, Anticyclotomic  $p$ -adic

$L$ -functions for modular forms, 京都大学数論合同セミナー, 京都大学理学部数学教室, 2012年5月18日.

千田雅隆, Anticyclotomic  $p$ -adic  $L$ -functions for modular forms, Math-Strings seminar, 東京大学数物連携宇宙研究機構, 2012年5月22日.

Masataka Chida, Anticyclotomic  $p$ -adic  $L$ -functions for modular forms, 2012 NCTS Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan, 2012年8月29日.

Masataka Chida, Anticyclotomic  $p$ -adic  $L$ -functions for modular forms, Seminaire Groupes Reductifs et Formes Automorphes, パリ第六大学 Jussieu 数学研究所, フランス・パリ, 2012年10月8日.

Masataka Chida, Indivisibility of  $L$ -values, The 15th Autumn workshop on Number theory, 白馬ハイマウントホテル, 長野県, 2012年10月29日.

Masataka Chida, Anticyclotomic  $p$ -adic  $L$ -functions for modular forms, Seminaire d'arithmetique a Lyon, ENS Lyon, フランス・リヨン, 2012年11月20日.

千田雅隆, Anticyclotomic  $p$ -adic  $L$ -functions for modular forms, 研究集会「代数的整数論とその周辺」, 数理解析研究所, 京都大学, 2012年12月3日.

Masataka Chida, Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, Mini-Workshop on Arithmetic, TIMS, 国立台湾大学, 2012年12月17日.

Masataka Chida, Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, Séminaire de théorie des

nombres de l'IMJ, パリ第六大学 Jussieu 数学研究所, フランス・パリ, 2013年1月14日.

Masataka Chida, CM cycles on Kuga-Sato varieties and vanishing cycles, Summer Number Theory in Milan, 2013 June 25, Milano University, Italy.

Masataka Chida, Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, Arithmetic Geometry Seminar, 2013 October 11, McMaster University, Canada.

21 Masataka Chida, Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, Number Theory Seminar, 2013 October 16, University of Toronto, Canada.

22 Masataka Chida, Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, The 16th Autumn Workshop on Number Theory, 2013 November 8, Hakuba High Mount Hotel.

23 千田雅隆, 保型形式に対する反円分的  $p$  進  $L$  関数と反円分的岩澤予想について, 北海道大学数論幾何セミナー, 2013年12月24-25日, 北海道大学.

24 Masataka Chida, Introduction to Beilinson conjecture for modular curves, NCTS Number Theory Seminar, 2014 January 14, National Taiwan University.

25 Masataka Chida, Anticyclotomic Iwasawa main conjecture for modular forms, East Asia Number Theory Conference, 2012 January 21, Nishijin Plaza, Fukuoka.

26 千田雅隆, Selmer groups and central  $L$ -values for modular forms, 室蘭整数論セミナー, 2014年1月30日, 室蘭工業

- 大学.
- 27 Masataka Chida, Central  $L$ -values for modular forms and CM cycles on Kuga-Sato varieties, Seminaire d'arithmetique a Lyon, 2014 February 25, ENS de Lyon.
- 28 Masataka Chida, Explicit regulators for Rankin-Selberg products of higher weight modular forms,  $p$ -adic variation in Number Theory, 2014 年 6 月 5 日, Boston University, アメリカ.
- 29 Masataka Chida, Beilinson conjecture for Rankin-Selberg products of modular forms, Japan-Taiwan joint conference on Number Theory, 2014 年 9 月 5 日, 気仙沼大島.
- 30 Masataka Chida, Beilinson conjecture for Rankin-Selberg products of modular forms, NCTS Number Theory seminar, 2014 年 9 月 11 日, 国立台湾大学, 台湾.
- 31 千田雅隆, Rankin-Selberg  $L$  関数に対する Beilinson 予想について, 京都大学数論合同セミナー, 2014 年 10 月 10 日, 京都大学理学部.
- 32 Masataka Chida, Regulators and special values of Rankin-Selberg  $L$ -functions, 日韓整数論セミナー, 2014 年 11 月 22 日, 慶應大学理工学部.
- 33 千田雅隆, 保型形式の  $L$  関数の中心値と Selmer 群について, 早稲田大学整数論セミナー, 2014 年 12 月 19 日, 早稲田大学理工学部.
- 34 Masataka Chida, Regulators and special values of Rankin-Selberg  $L$ -functions, モジュラー形式と保型表現, 2015 年 2 月 5 日, 京都大学数理解析研究所.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~chida>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

千田 雅隆 (Masataka Chida)  
京都大学・白眉センター・助教  
研究者番号 : 00451518

##### (2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

##### (3) 連携研究者

( )

研究者番号 :