

平成 2 7 年 9 月 3 0 日現在

機関番号：2 4 4 0 2

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：2 3 7 4 0 0 1 7

研究課題名(和文) 普遍コンパクト空間の構造解析

研究課題名(英文) Analysis of the universal compactifying space

研究代表者

高木 聡 (TAKAGI, Satoshi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・研究員

研究者番号：2 0 4 5 6 8 4 1

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000 円

研究成果の概要(和文)：トポロジーにおけるStone-Cechコンパクト化に対応するものとして、代数幾何学におけるZariski-Riemann空間を特徴付けた。その際に固有射の再定義を行っている。また凸体の幾何学を代数的に定式化することもできた：すなわちある代数型 τ が存在して、凸体は τ 代数としてみなせることを意味する。これによって凸体に代数的な手法や定理が適用できるようになる。またそれをさらに発展させ、数論においても代数的整数環のスペクトラムの数論的コンパクト化の純代数的定式化に成功した。これは上の τ 代数を考えると同時にZariski-Riemann空間の構成法を組み合わせることによって可能となる。

研究成果の概要(英文)：We characterized the Zariski-Riemann space (which is treated in Algebraic geometry) as an analog of Stone-Cech compactification, which is treated in Topology. We also re-defined proper morphisms to reach this goal. Also, we succeeded in formularizing convex geometry in pure algebraic manner; this means that there exists an algebraic type τ such that convex polytopes can be regarded as a τ -algebra. Furthermore, applying this technique to arithmetics, we succeeded in formularizing arithmetic compactification of the spectrum of algebraic integer ring in a pure-algebraic manner. This is accomplished by considering the above τ -algebras and the construction of the Zariski-Riemann space simultaneously.

研究分野：代数幾何学

キーワード：圏論 代数幾何学 数論

1. 研究開始当初の背景

Zariski-Riemann 空間 (以下 ZR 空間) は代数幾何学分野においてはやや特殊な地位を占める: これはおおまかに言うと3通りの描写があり、1つ目はある関数体上の付値 (あるいは素点) 全体の集合にある代数構造をいれたもの、2つ目は代数多様体上で爆発を繰り返した後の極限空間、3つ目は与えられた代数多様体の普遍コンパクト化である。これらはいずれも考える体が代数体、あるいは1次元関数体であれば通常の概型 (解析化するとコンパクトリーマン面) となり、古典的によく研究されてきた。一方で関数体の次元が2以上になると ZR 空間は局所環付き空間にはなるが代数多様体として扱えなくなる。しかし古くよりこの場合でも Zariski は ZR 空間を特異点解消に用いたり、Nagata 埋め込みなど通常の代数幾何学にも応用されてきた。

現在でも Rigid 幾何学を考える上で ZR 空間は欠かすことのできない概念の一つである。

概型の理論は EGA で理論が整備されて以降、代数幾何学における中心であり続けてきた。その一方で、従来の代数多様体では対処できない高度な問題も所々に現れてきており、それに対応するように新たな理論も提唱されている。代表的なものでは Toën, Lurie などの提唱する導来代数幾何学などがある: これは概型の理論のベースをなしていた可換環の理論を DGA、あるいは E_∞ 代数などに置き換えて得られるものであるが、例えばトポロジカルモジュラーフォームの研究に向けて開発されたもの (研究途上) である。

今回の研究は彼らの理論とはまた方向性が異なるが、スキーム理論の一般化を目指したものである。

2. 研究の目的

ZR 空間は有用な概念であるにもかかわらず、それに概型としての構造をあたえられないが故に異端児扱いされてきた。ならばそもそも「概型」という舞台設定——圏——そのものを考えなおしてもいいのではないか。ZR 空間を適切に扱えるような圏を考案することが当初の目的であった。そして ZR 空間を概型と同様に扱えるようになった後には特異点解消などの通常の代数幾何学への応用を考えていくことが想定された研究の道筋であった。

3. 研究の方法

最初のヒントはトポロジーにあった: 与えられた位相空間 X に対しては Stone-Cech のコンパクト化 βX という、普遍的なコンパクトハウスドルフ空間が与えられる: X からコンパクト Hausdorff 空間 Y への連続写像 $f: X \rightarrow$

Y が与えられたとき、 f は連続写像 $\beta X \rightarrow Y$ に一意に拡張される。(図1)

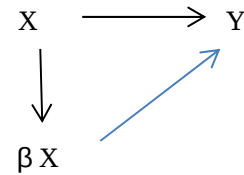


図1 Stone-Cech のコンパクト化

これは Tychonoff の補題として知られているように、コンパクトハウスドルフ空間の圏が完備であることに由来する。ここからは Freyd の随伴関手定理によって随伴関手 (言い換えると、普遍射) が得られるわけである。一方、代数幾何学においては「コンパクト性」に対応する概念として「固有射」というものがあるが、これは付値判定法によって定義される (図1)。

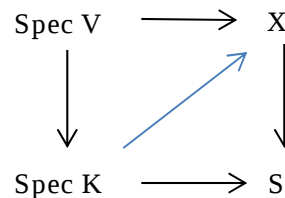


図1 固有射の付値判定法

$f: X \rightarrow S$ が固有射であるための必要十分条件は任意の付値環 V とその商体 K および上の黒の可換図式について、射 $\text{Spec } K \rightarrow X$ が一意に存在して図式全体を可換にする。

これは次のアナロジーと見たほうが簡明である: Hausdorff 空間 X がコンパクトである必要十分条件は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ からの任意の射 $\mathbb{N} \rightarrow X$ が $\beta \mathbb{N} \rightarrow X$ に一意に拡張されることである。固有射がコンパクト性に対応するのであれば、Stone-Cech のコンパクト化のアナロジーが代数幾何学においても存在することを期待するのは自然である: これが付値をパラメトライズする ZR 空間であるが、これは一般の概型 X に対して実際には概型の圏では実現できない。

可換環の圏のみならず、あらゆる代数の圏は完備かつ余完備であるのだが、一方でその発展版である概型の圏は完備ではない。完備性の障害となっているのは概型の定義そのものにある: 「局所的にアフィン」という条件のために有限極限 (ファイバー積) しか取ることができなくなっていたのである。

したがって概型の性質を保ちつつ小極限をとることができる圏 (あるいは対象) を考えた結果、A-概型というものに到達した: これは関数の「台」に着目するという自然な発想の下に生まれた概念で、A-概型の圏は小完備

かつ余完備であることが判明した。後にこの概念は局所環付き空間と同値の概念であることもわかったのだが、局所環付き空間の圏の考察自身があまり進んでいないということもあり、研究した結果の価値はさほど減じていない。

ここから Freyd の随伴関手定理より A-概型の圏において ZR 空間が構成され、普遍的性質を持つことがわかる：固有射の概念は概型の場合の類似で定義できる。

ただし、ここから先、新しい概念を定義して議論を進めようとする場合、常に「定義した概念が実際に有効なのかどうか」という問題がつかまとう。あまりにも色々なことが未整備のため、具体的な既存の問題解決にはまだほど遠い状況の中で、定義したものが役に立つかどうかの指標は実のところ普遍性に求めるしかない。したがってこれより先、新しい概念はその圏論的性質、および普遍性を用いた記述を求める必要が生じてきた。

例えば、多項式環は環の圏 Ring から集合の圏 Set への忘却関手の左随伴から自然に生まれ、所々の良い性質を持っている重要な研究対象であることは論を俟たない。実際、現在既に定着している概念などでも圏論的性質でその正統性を示されているものは実は多くないため、ここに莫大な労力が必要とされる。また普遍性の記述を求める際には、今扱っている「対象」や「圏」をより広い圏のなかで考えることで初めて普遍性が見えてくる場合もある。従って、当初はネータ可換環の範囲内で考えていたものが、非ネータ、または非可換環の枠組みの中で考えるようになった。

4. 研究成果

研究内容は徐々に当初想定できなかった方向に発展した：実は概型は可換環だけではなく微分次数代数や可換モノイドなどを元に定義することもできる。可換環はアーベル群の圏における可換モノイド対象であるが、この「アーベル群」の部分のを他の代数型に置き換えることで整数論への応用につながった。この代数型に求められる条件は『可換性』と呼ばれるが、2項演算の通常の意味での可換性とは異なり、例えば「2 : 1 内分点をとる」という操作（これは可換性はあるか結合則も満たさない）も許容される。

可換な代数型 τ が与えられた場合、テンソル積が Hom 関手の左随伴として自然に定義される。従ってこのテンソル積に関するモノイド対象として環が自然に定まる。また1つの元で生成される自由 τ 代数は自然に可換環の構造を持つ。これは自由アーベル群 Z が可換環の構造を持つことの類似である。

さらに τ 上の可換環 R について、そのスペクトラムもまた通常の場合と同様に定まる：スペクトラムは環から定まる局所環付き空間であり、その思想は Gelfand-Naimark 双

対を起源に持つ。すなわち、コンパクトハウスドルフ空間 X に対して、 X 上の複素数値連続関数全体のなす環 $C(X)$ を対応させる関手は、コンパクトハウスドルフ空間の圏と可換 C^* 環との間の半変同値を与える。これと同様に、可換環 R が与えられたとき自然にある空間（スペクトラム）が定まり、 R はその上の関数環とみなせる。

さらに、概型というものも自然に定義される。概型は「局所的にアフィン（環のスペクトラム）」である局所環付き空間である。

代数型 τ を固定した場合に、 τ 上の環から定まるスキームの圏に対しては「貼り合わせ」によって特徴付けられる普遍性で定まることも筆者は示している。

さて、「(任意の比で) 内分点をとる」という2項演算とメネラウスの定理を公理系とする代数型 τ を考えると、ねじれない τ 代数は凸体に対応し、これまで幾何学的対象としてのみ扱われてきた凸体が代数的なものとして捉えられるようになる：これは代数的な手法を凸体の研究に応用できるようになり、また代数的観点から新たな研究テーマも提供されることを意味する。また τ 代数上のモノイド対象（環）の始対象は付値環と類似の構造を持ち、その上の加群の振る舞いにも一定の類似性が見られる：加群の接続性や極小自由被覆の存在などが挙げられる。また単因子論に対応する定理が成り立つことも示している。

このことはさらに整数論とつながっていく。コホモロジーの多くはコンパクトな空間上、あるいは計量などの付加的条件がないと有限次元性が保証されない。これが、与えられた多様体のコンパクト化が求められる大きな理由の一つであり、Riemann-Roch はコホモロジーの次元の交代和（オイラー標数）の幾何学的描写である。代数的整数環のスペクトラムはそのままでは「開いた」曲線であり、実際には Riemann-Roch などの定理の記述などにおいては数論的コンパクト化、すなわちスペクトラムに無限素点を付け加えることでコンパクト化とみなした数論的コンパクト化を考える。

しかし無限素点（あるいはそれに対応する Archimedes 付値）は ad hoc な定義となっており、通常の環論に議論が乗りにくい（対照的に、通常の素イデアルなどは分配格子の理論と Stone 双対性から必然的に現れる概念である）。

これはアーベル群よりも一般的な代数系を考えることにより解決する：「中点をとる」操作は結合的ではないが、可換な代数型 τ をなすので τ 上の可換環のスペクトラムを考えることができる。いま τ 上の環の始対象を R としたときそれは自然な次数構造がはいるので射影スペクトラム $\text{Proj } R$ を考えることができる。これをさらに ZR 空間の構成法の類似で完備化することによってが手に入る空間が上述の数論的コンパクト化に一致す

る。これを示す際には Ostrowski の定理の一般化を用いる。

従って通常の環だけでなく、 τ 上の環の加群の理論の整備が必要となってくるが、その際に新しい概念の定義をどのようにするか、という問題が常につきまとう。それは前述のように圏論的見地からできるだけ「普遍性」を以って定義したほうがよい。

現在標準とされている代数幾何学はネータ可換環の理論が基板となっているが、今ここで扱おうとしている ZR 空間は局所環が付値環であり、ネータ環ではないため種々の次元論が成立しない。従って扱う加群（あるいは環）のクラスに適切な有限性条件を付加しなければならない。また一方で圏論的見地からは可換環よりも一般の非可換環を考えることが自然である：非可換環は対象がただ 1 つの加法的圏と同一視できるからである。また森田理論や群作用などを考えるにあたっても非可換環の枠組みで考えたほうがよい。このように従来の枠組みから一步拡張した視点から研究することで初めて、従来の枠組みの正当性が保証される。実際、各種概念等の普遍的性質による再定式化はより広い枠組みで考えなければいけない場面がある（図 3）。

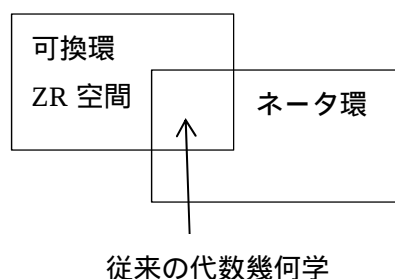


図 3 代数幾何学の拡張可能性

まず非ネータ可換環の方から説明する。体上の 1 変数多項式環や有理整数環は単項イデアル環であり、その上の有限次整拡大は Dedekind 環であるが、これらの非ネータ環のバージョンがそれぞれ Bezout 環、Prüfer 環である：Prüfer 環は局所環がすべて付値環となっている整域であり、Bezout 環が有限生成イデアルがすべて単項イデアルとなっている整域である。Bezout 環の例としては、有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉体における $\mathbb{Z}$ の整閉包や、複素平面上の整関数全体のなす環などがある。さらに Dedekind 環は大域次元が 1 以下という特徴付けができるが、Prüfer 環は平坦次元が 1 以下という特徴付けができる。これは平坦加群が射影加群のフィルター余極限であるという Lazard の定理より自然な結論であるが、一方で非ネータ Prüfer 環の具体的な構成は基本的に難しい。現在でも「Bezout 環は基本因子環か？」という素朴な問題が未解決なのはこのあたりに起因する。

これらの環は非ネータであるため、ネータ可換環で成立する各種次元論が成立しにく

いことは前述したとおりであるが、一方でコヒーレンスまでは保証されるため、コヒーレント加群のみを扱う分には病的な事態は生じない。例えば付値環（これは Prüfer 環で局所環である）の最小入射余生成子はその構造の描写が困難であるが、コヒーレント加群に対して入射性を保つ弱入射生成子は簡単に表せる。

これらの環は ZR 空間と密接な関連があるとも想定されるが、一方で ZR 空間が局所的にこれらの環のスペクトラムかどうかは一般には疑わしい。

次に非可換環を考察する。例えば Barr-Beck の定理より Grothendieck の平坦降下理論が非可換環の場合にも成立することが分かる。また微分加群の存在や不分岐性なども非可換環の場合まで拡張できることがわかる：これらは今までの代数幾何学が少なからぬ部分で非可換環にまで拡張できる可能性があることを意味する。また環に対してネータ性、あるいは可換性のどちらかを仮定することで成り立つ定理群が存在することも注目に値する。

ただし実際には非ネータ非可換環という最も一般的な枠組みで考えようとするとき Leavitt 環などに代表されるように、自由加群の階数の不変性が保たれなくなるなどの不都合が生じるため、考える環に何らかの条件を置く必要がある。また今のところ可換環の場合のスペクトラムが、非可換環の場合には自然に定義されない（ネータ環の場合に定まる Atom スペクトラムなどいくつかの案はでていいる）が、それに対応するものが何であるのか、についてはまだ結論は出ていない。

これらの結果の一部については Linear Algebra—from the categorical point of view (preprint) にまとめている
(researchmap にて入手可能)

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Satoshi Takagi,
A-schemes and Zariski-Riemann spaces,
Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 査読有り 127
(2012) 121-177

〔学会発表〕(計 8 件)

2015/3/19 高木 聡 Polytopes, as algebras,
第 20 回代数学若手研究会, 名古屋大学,

愛知県名古屋市

2013/3/17 高木 聡 Associated primes on non-noetherian modules, 第18回代数学若手研究会大阪大学, 大阪府豊中市

2012/11/2 高木 聡 Compactifying Spec $\mathbb{Z}$, 九州大学代数セミナー, 九州大学, 福岡県福岡市

2012/10/22-26 高木 聡, Compactifying Spec $\mathbb{Z}$, 城崎代数幾何学シンポジウム, 城崎大会議館, 兵庫県豊岡市

2012/4/13 高木 聡, アラケロフコンパクト化の純代数的構成, 京都大学数論合同セミナー, 京都大学, 京都府京都市

2012/3/28 高木 聡, A-概型とZariski-Riemann空間, 日本数学会2012年度代数学分科会, 東京理科大学, 東京都新宿区

2011/10/13 高木 聡, Extensions of the category of schemes, 東北大学代数セミナー, 東北大学, 宮城県仙台市

2011/7/1 高木 聡, A-scheme and its applications, 京都大学代数幾何学セミナー, 京都大学, 京都府京都市

〔その他〕

ホームページ等

<http://researchmap.jp/moderatissimo/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高木 聡 (TAKAGI Satoshi)
大阪市立大学・大学院理学研究科研究員
研究者番号: 20456841