2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４６０２

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2018

課題番号：２３７４００２０

研究課題名（和文）保型Ｌ関数の零点の位数と特殊値

研究課題名（英文）The order of zeros of automorphic L -functions and the value of L-functions

研究代表者

梅垣　由美子（Umegaki, Yumiko）

奈良女子大学・自然科学系・准教授

研究者番号：８０３７２６８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：L 関数やその対数関数の特殊値を調べることやその応用を目的として研究を行った。値分布の手法はリーマンのゼータ関数やディリクレの L 関数に対して既に導入されていた研究であるが、既存の議論や手法を見直し・拡張することで、保型 L 関数へ適用を可能とすることができた。また L 関数の対数関数の特殊値の研究の応用にも取り組み、4 次代数拡大の場合と 9 次代数拡大の場合に類数が大きい体が無限に存在することを考察した結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
この研究は整数論の諸問題に対して様々な応用が考えられる。保型 L 関数の場合、関数等式の折り返しの点における零点の位数は解析的階数として楕円曲線の有理点が成す有限生成アーベル群の階数と関連する。この階数を解析的に研究する新しい手法を導入した。また、ディリクレ L 関数の特殊値は代数体の類数と関係するため、古くから研究がされているが、合成体に関して類数の大きなものが無限に存在することを議論する方法論を確立した。これらの結果やその手法は今後の整数論の研究においてとても効果的であると言える。

研究成果の概要（英文）：The present study evolved the methods for the study of the value distribution of Riemann zeta function, Dirichlet L-function and the logarithm of them, and applied this method to the value distribution of the logarithm of the automorphic L functions.
For the composite fields with large class numbers, the present study established the method to prove that there exist infinite many such fields. And it was proved for all types of quatic number fields. Moreover the possibility of it was proved for bycubic number fields.

研究分野：整数論

キーワード：特殊値　類数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

Birch and Swinnerton-Dyer 予想が肯定的に考えられているもとで、解析的側面から Modell-Weil 群のランクを研究することが Modell-Weil 群のランクの研究に対して有効であると考えた。これは primitive from に付随する L 関数 L(s) の s=1/2 における零点の位数の研究を意味し、解析的ランクと呼ばれている。特に位数 0 の場合、つまり零点とならない場合が、non-vanishing と呼ばれ、1995 年に Duke の結果以降多くの L 関数について研究がされている。Duke は s=1/2 における L 関数の値の平均を考えることで、non-vanishing となる L 関数の割合を考えた。しかしこの Duke の手法は、保型形式の空間の直交基底で平均を考えるため、一般的には楕円曲線と対応する primitive form に限った議論にはならず、Duke の手法を用いた既知の結果の多くが cusp form の空間の基底での non-vanishing を論じたものになっている。しかし、研究代表者によって素数冪のレベルの old from の空間の基底を下のレベルの同じ内積を持つ primitive form で記述することが可能となり、それによって、primitive form に制限した non-vanishing を考えることができる例を得ることができた。しかし、この結果は重さにも条件が付くので、一般的な結果とは言い難い。そこで、一般のレベルの primitive form を扱うことを目標とし、レベルや重さに関する条件の緩和が最初の課題となっていた。

このような non-vanishing の議論は保型 L 関数の関数等式の折り返しの点 s=1/2 の値を研究することとも言える。従ってこの研究における手法は、s=1/2 に限らず、数論的に重要な情報を持つことが多い L 関数の特殊値を研究することに応用できる可能性があると考えられる。

２．研究の目的

保型 L 関数の特殊値や関数等式の折り返しの点における零点の位数を調べることを目的とする。これは Modell-Weil 群の解析的ランクの研究とも関連する興味深い対象である。楕円曲線には重さ 2 の primitive form が対応するので、その primitive form に付随する L 関数 L(s) の s=1/2 における零の位数が研究対象の一つである。特に位数 0 の primitive form がどれくらい存在するかという研究において、重さが 2 でレベルが素数である primitive form の場合に Duke が論じた手法が拡張され、現在 cusp form の空間の基底に付随する L 関数のうち s=1/2 において位数が 0 のものがどれだけあるか（non-vanishing なものがどれだけあるか）という議論に関しては多くの結果が得られている。また、それは様々なタイプの保型 L 関数に拡張されている。しかし、Duke は重さ 2 で素数レベルの場合を議論したため primitive form と cusp form の空間の基底が一致していたが、一般にはこれらは一致しない。そして、この Duke によって提案された手法は cusp form の空間の基底のある種の直交性を利用しているため、一般に primitive form に制限することは難しい。従って、多くの結果は cusp form の空間の基底において non-vanishing を議論している状況にある。一般のレベルで primitive from に制限した結果が得られていないため、この non-vanishing の問題は Modell-Weil 群の解析的ランクを調べるという目的のもとでは、まだまだ研究が進んでいない状態であるといえる。代表者は重さとレベルに条件がまだ付いているものの、Duke の結果よりもう少し緩い条件で primitive form に付随する L 関数の non-vanishing を研究した結果を得ていたので、この研究結果をもとにして、cusp form の重さの制限を外すことを第一の目的とした。また、レベルの制限を外すために old form の空間の基底を一般的に考え、cusp form の空間の基底に付随する L 関数の値の平均から primitive form に付随する L 関数の値を取り出す研究を進めることも考える。

このような研究で扱われる手法は特殊値の研究とも関係する。整数論で研究対象となっている様々な L 関数の特殊値の研究にも応用することを考える。特に s=1 における L 関数の値は数論的に重要な情報を持つことが多いので、その研究への応用を考えることも目的の一つである。例えば、 s=1/2 における重さ k の primitive form に付随する L 関数の値が $(\log k)^{-2}$ より大きくなる primitive form の密度が Landau-Siegel zero の問題に貢献することが Iwaniec と Sarnak により 2000 年に指摘されている。Landau-Siegel zero とは元々は Dirichlet L 関数の実零点のうち s=1 に近い零点の非存在の問題に由来する。これは算術級数中の素数定理を得る時に、理論上扱われるもので、effective に扱えないことが問題となっている。特に s=1 の近くの零点の非存在は L 関数の s=1 における値の下からの評価と関係するので、Dirichlet L 関数が代数体の類数の情報を持っていることを思い出すと、類数の問題にも絡んでくる。このように、算術級数中の素数定理や類数といった整数論において重要な対象に s=1/2 の値の密度から迫ることができるという意味でも値分布の手法による研究は非常に興味深い。

３．研究の方法

Modell-Weil 群のランクを考えるためには primitive from に付随する L 関数を考える必要がある。Non-vanishing などに関連する既知の結果の多くは primitive form に限定せずに cusp form で考えられている。しかし、代表者が primitive form に限った場合の non-vanishing の結果を重さに制限を付けて素数冪のレベルの場合に得ることができた。一方で 1999 年に Pizer の結果を用いて Akbary が素数レベルの primitive form に付随する L

関数の non-vanishing を考えた結果があるので、双方を用いて、代表者の結果から重さの制限を外すことを考え、またその手法を non-vanishing に限らずに L 関数やその対数や対数微分の s=1/2 や s=1 の値の研究へ発展させる。特に Dirichlet L 関数の s=1 の値は類数の情報を持つので、類数の研究に関する貢献も期待でき、後者は non-vanishing に限らず、零点の位数の研究につなげる意図がある。

また、値に関しては値分布の議論を用いた研究が解析数論の分野で大きく発展しているので、その応用として保型 L 関数の対数や対数微分の値の分布の情報を持つ密度関数を定義して、それを Modell-Weil 群の解析的ランクを調べることに応用できないかの考察を深める。

４．研究成果

(1) 研究代表者の素数幕レベルに限った primitive form に付随する L 関数の議論をより発展させる方法を考えていた。しかし、研究を進めていくと、old form の空間の基底を構築できても、計算上うまく利用できない形であるなどの幾つかの困難が現れた。素数幕のレベルに限り、重さの条件を外すことは Modell-Weil 群の解析的ランクを調べるという問題に対して、本質的な解決につながる可能性が低く感じられたため、保型 L 関数の対数や対数微分の値分布の研究から Modell-Weil 群の解析的ランクにアプローチする方針を重視することとした。

(2) Primitive form に付随する L 関数の対数や対数微分の値分布をどの aspect で考えるかで状況は大きく異なった。まず、Modell-Weil 群の解析的ランクを総合的に捉えるためにレベル aspect で密度関数の構築することができた。しかし、これは cusp form の空間のある種の直交性を用いるという non-vanishing の問題と同様の問題が生じた。しかし、研究過程において Sato-Tate 測度との関連を感じさせる箇所がいくつかあり、Sato-Tate 測度との関連も視野に入れて、また違った視点での研究がスタートした。Sato-Tate 測度という今までと異なる視点が入ることにより、Modell-Weil 群の解析的ランクの研究という課題に対して新たな進展を期待したい。

また、primitive form に付随する L 関数の対数や対数微分の値分布を、$s=\sigma+it$ と書いた時の t-aspect で密度関数を構築することにも成功した。Primitive form に付随する L 関数は従来の Riemann-zeta 関数や Dirichlet L 関数とは Euler 積における素数 p の項が大きく異なる。従って、それまでに得られていた密度関数の構築方法をそのまま適用することができない。しかし、従来の方法を精査することによって primitive form に付随する L 関数の密度関数を構築することができた。ここで提案された方法は他の L 関数にも応用できる可能性が高く、非常に有効な手法を整えることができたと言える。

値分布の議論を深めるうち、cusp form に付随する L 関数の議論と primitive form に付随する L 関数の議論をそれぞれの密度関数で比較できないかという発想に至った。違う対象を考えていても、密度関数として現れるものに共通の性質があったりしないかどうか、あるレベルの primitive form と cusp form を比べるのではなく、すべてのレベルで見ると、その違いが別の形で表現できるのではないだろうか、という点が問題意識である。保型 L 関数に関するこのような研究はやっと密度関数が定義できた段階なので、まだまだ始まったばかりと言える。この内容は今後重点的に研究を進めていくべきものであると考えている。

(3) 値分布の研究において L 関数の対数の値の漸近式を得た。この応用として、一般の L 関数の対数の値の漸近式も改良できた。また、特に Dirichlet L 関数の対数の s=1 での値の漸近式は 1977 年に Montgomery and Weinberger によって類数の大きい実 2 次体が無限個存在することの証明に利用されている。これを 4 次の代数拡大体の場合に拡張した。4 次代数拡大体はタイプが 4 つあるが、2012 年に Cho and Kim によって総実巡回拡大の場合のみ類数が大きいものが無限にあることが示されていた。他のタイプにおいて類数が大きいものが無限個に存在することを証明することができた。また、2 つの相異なる 3 次巡回拡大の合成体に関して類数と単数基準の積が大きいものが無限個存在することを示し、その議論を一般の合成体の場合に拡張した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3　件）

1. Y. Morita, A. Umegaki and Y. Umegaki, Bicubic number firlds with large class numbers, Various Aspects of Multiple Zeta Functions in honor of Professor Kohji Matsumoto ’s 60^{th} birthday, Adv. Stud. Pure Math., to appear.
2. K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the density function for the value-distribution of automorphic L-functions, Journal of Number Theory 198 (2019), 176–199
3. K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions, International Journal of Number Theory 14 (2018), no. 7, 2045-2081

〔学会発表〕（計　5　件）

1. Y. Umegaki, On the value-distribution of the difference between logarithms of two

symmetric power L-functions, Various Aspects of Multiple Zeta Function (2017)
2. Y. Umegaki，保型 L 関数の対数値の平均と密度関数に関する考察，愛知数論セミナー(2017)
3. K. Matsumoto, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions, RIMS Workshop 2016 Problems and prospects in Analytic Number Theory (2016)
4. K. Matsumoto, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions, ASPECTS OF UNIVERSALITY 2016 (2016)
5. Y. Umegaki，保型 L 関数の対数値の平均と密度関数，早稲田整数論セミナー(2015)