

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740022

研究課題名(和文) 頂点作用素代数のオービフォールドモデルの有限性に関する研究

研究課題名(英文) Study on finiteness conditions of orbifold models of vertex operator algebras

研究代表者

安部 利之 (Abe, Toshiyuki)

愛媛大学・教育学部・教授

研究者番号：30380215

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：頂点作用素代数の表現論において重要な概念の一つに C_2 余有限性と呼ばれるものがある。この有限性は、有限生成加群が有限の組成列を持つなど表現論に大きな制約を与えが、特殊な場合を除けば確認がとても難しい。例えば C_2 余有限頂点作用素代数の位数 2 の固定点のなす部分頂点作用素代数がまた C_2 余有限となるかですら予想でしかなかった。本研究では一般の対称群の 2 群である部分群に対し置換オービフォールドモデルと呼ばれる頂点作用素代数を考えると、この有限性が保たれることを証明した。また特別な置換オービフォールドモデルのある部分代数の構造を発見した。

研究成果の概要(英文)：In Representation theory of vertex operator algebras, the finiteness condition called C_2 -cofiniteness is one of important condition. The condition make finitely generated modules finite length although the verification is very difficult except for special cases. For example, an orbifold of C_2 -cofinite vertex operator algebra by an automorphism has been believed to be C_2 -cofinite for long time (Recently, this fact was proved by Miyamoto). On this research, I proved that for an arbitrary 2-subgroup G of the symmetric group S_n , the G -permutation orbifold of a C_2 -cofinite vertex operator algebra is also C_2 -cofinite. I also found an explicit structure of certain commutant of a 4-cyclic permutation orbifold model of an affine vertex operator algebra of type A_1 and level 1.

研究分野：頂点作用素代数の表現論

キーワード：頂点作用素代数 オービフォールドモデル Virasoro 代数 C_2 -余有限性

1. 研究開始当初の背景

本研究課題にある「頂点作用素代数」とは無次元ベクトル空間に可算無限個の演算が定義された代数系である。頂点作用素代数の概念は1980年代中頃に見いだされ90年代にかけて大きく発展をしている。その頃は有理的共形場理論の数学的モデルである有理的頂点作用素代数が研究の中心であり、個々の共形場理論のモデルで現れていた指標のモジュラー不変性や Verlinde 公式などが頂点作用素代数の枠組みにおいて統一的に証明できるなど、非常に魅力のある数学的对象であった。更にモンスター群と保形関数の関係を暗示していたムーンシャイン予想が頂点作用素代数を経由し解決されたが、同様の暗示がマシュー群に関しても起きるというマシュームーンシャインの研究につながるなど、その効用は現在でも色あせない。2000年代に入ると、筑波大学の宮本氏は、モジュラー不変性が成り立つのは有理性より C_2 -余有限性が本質であることを指摘し、実際に指標の概念を拡張することで有理的でない頂点作用素代数に関してもモジュラー不変性が成立することを証明している。有理的でない C_2 -余有限な頂点作用素代数のモデルは logarithmic 共形場理論に対応しており物理の方面からの研究も進んでいる。本研究課題代表者はそのような頂点作用素代数のモデルを、シンプレクティックフェルミオンを用いて構成した。このように2000年代には頂点作用素代数の表現論の興味が、有理的でない C_2 -余有限な頂点作用素代数に移ってきた。

本研究課題を開始した2011年あたりも、引き続き有理的でない C_2 -余有限な頂点作用素代数の表現論が一般論で研究されていた。

2. 研究の目的

上記の研究の背景にあるように、有理的でない C_2 -余有限な頂点作用素代数の表現論は現在でも研究されているが、研究課題開始当初はそれほど多くの具体的な例が知られていなかった。そこで

予想

「 C_2 -余有限な頂点作用素代数のオービフォルドモデルも C_2 -余有限である」

という広く信じられている予想を解決することを目的に研究を始めた。この予想を用いると、知られている C_2 -余有限頂点作用素代数から新たに C_2 -余有限頂点作用素代数を作り出すことができる。ここでオービフォルドモデルとは、頂点作用素代数の有限自己同型群による固定点のなす部分頂点作用素代数のことである。特に本研究課題では、頂点作用素代数の n 個のコピーのテンソル積とそこに自然に作用する n 次の置換群に関するオービフォルドモデルである置換オービフォルドモデルと呼ばれる頂点作用素代数に着目しその C_2 -余有限性が保たれることの証明

を目指した。

3. 研究の方法

本研究目的を達成するために、次の課題を設定し、研究を遂行することとした。

課題 1: 位数 2 の自己同型群に関するオービフォルドモデルの構造解析

課題 2: 強生成系から頂点作用素代数の新しい構造の発見

課題 3: 置換オービフォルドモデルの構造研究

またこれらの課題を解決するために次の問題について考察した。

問題 1: 一般の頂点作用素代数に関する 2 次の置換オービフォルドモデルの C_2 -余有限性の証明

問題 2: Virasoro 頂点作用素代数について、一般次数の対称に関する置換オービフォルドモデルの C_2 -余有限性の証明

問題 3: 一般の頂点作用素代数に関する n 次の置換オービフォルドモデルの C_2 -余有限性の証明

上記の課題や問題を解決するために、学会、研究会、セミナーに出席し、新たな知見や意見の交換を行った。

4. 研究成果

(1) 問題 1 の解決

研究期間の前半に**課題 1**、**課題 3**に関して、**問題 1**が解決した。つまり一般の C_2 -余有限な頂点作用素代数に関し、その 2 次の置換オービフォルドモデルは C_2 -余有限であることを証明した。その証明の一部では雑誌論文 で与えた置換オービフォルドモデルの C_2 -余有限性と同値な条件を用いている。その成果はオービフォルドモデルの C_2 -余有限性を一般的な枠組みで論じて成功した初めての成果である。またその応用として、格子頂点作用素代数の位数 2 の自己同型によるオービフォルドモデルが C_2 -余有限であることの別証明を与えることができた。これらの研究成果については Commun. Math. Phys. に掲載された(雑誌論文)。

その論文投稿後に、別な応用として、一般次数の対称群 S_n の 2-群と呼ばれる位数が 2 の巾である任意の部分群に関する置換オービフォルドモデルについても C_2 -余有限性が保たれることが証明できた。実際にはこのような 2 群は対称群のシロー 2-群の部分群になるので、このシロー 2-群に関する置換オービフォルドモデルについて、 C_2 -余有限性が保たれることを示せばよいが、そのシロー 2-群の構造は知られている

ので、その構造を用いてこの問題を解決した。この研究成果については論文として公表はしていないが、上海で行われたカンファレンス「Conference On Vertex Operator Algebras and Related Topics」において研究発表を行った(学会発表)。

(2) 一般場合の考察結果と関連する研究
研究期間後半は**問題 3**について考察した。つまり n 次の対称群 S_n に関する置換オービフォールド模型について C_2 -余有限性が保たれることの証明である。 n が 5 以上の場合は可解でなくなり非常に難しい問題であるので、 $n=3$ の場合の**課題 2** について考察した。その結果、小さな成果が得られたのでそのことについて台湾で行われた研究集会「Taitung Workshop」において研究成果発表を行った(学会発表)。同時期に一橋大学の山田氏からレベル 1 の A_1 型のアフィン頂点作用素代数の置換オービフォールド模型に関する問題を提示され、共同研究という形で研究に着手した。その結果、レベル 1 の A_1 型アフィン頂点作用素代数の 4 次の巡回群に関する置換オービフォールド模型の、その中に自然に現れるレベル 4 の A_1 型アフィン頂点作用素代数によるコミュタントの構造を記述することができた。その研究成果については広島大学で行われた日本数学会秋季分科会において発表した(学会発表)。さらにその構造が実はよく知られている階数 1 の格子頂点作用素代数の位数 2 の自己同型によるオービフォールド模型の二つのテンソル積を含んでいることが分かったので、そのことと単純カレント拡大の理論および量子ガロア理論を用いることで既約加群を分類した。その研究成果については、数理解析研究所で行われた研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」において公表及び成果発表を行った。また公表にはいたらなかったが、本来の目的である**予想**を解決するためにいくつかの考察を得ることができた。いずれも決定的な成果にはならなかったが、そのうちの一つには誘導表現の理論にもかかわると考えられるものもあった。誘導表現に関しては平成 27 年度からの科学研究費補助金基盤研究(C)に採択された課題において引き続き考察、研究を行う予定である。

尚 2014 年 11 月に有限可解群について、**予想**が正しいことを論じた宮本氏の論文が Commun. Math. Phys. の掲載されている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

T. Abe, "C₂-cofiniteness of 2-cyclic permutation orbifold models", Communications in Mathematical Physics 査読あり, 317, no. 2, 2013, 425-445, DOI 10.1007/s00220-012-1618-5

T. Abe, Y. Arike, "Intertwining operators and fusion rules for vertex operator algebras arising from symplectic fermions", J. Algebra, 査読あり, 2013, 373, 39-64
DOI 10.1016/j.jalgebra.2012.09.022

T. Abe, C₂-cofiniteness of the 2-cycle permutation orbifold models of minimal Virasoro vertex operator algebras, Communications in Mathematical Physics, 査読あり, 303, Issue 3, 2011, 825-844, DOI 10.1007/s00220-011-1209-x

[学会発表](計 11 件)

安部 利之, 頂点作用素代数 $\text{Com}_{\{(\widehat{sl}_2(1,0))^{\otimes 4}\}}(\widehat{sl}_2(4,0))$ の既約加群の分類について、有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2014 年 12 月 16 日。

安部 利之, A_1 型アフィン頂点作用素代数の 4 次巡回置換オービフォールド模型における、あるコミュタントの構造、日本数学会秋期総合分科会、広島大学(広島県・東広島市), 2014 年 9 月 22 日

安部 利之, C₂-cofiniteness and rationality of vertex operator algebras, Algebras, Groups and Geometries, 東京大学(東京都・目黒区), 2014 年 6 月 25 日。

安部 利之, A commutant in a cyclic permutation orbifold model of the lattice vertex operator algebra V_{A_1} of order 4, 有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市), 2013 年 3 月 5 日

安部 利之, On S_3 -permutation orbifold models of lattice VOA of rank one, Taitung Workshop, 国立台東大学, 2013 年 3 月 26 日

安部 利之, Representation of permutation orbifold models, Conference on Groups, VOAs and Related Structures, 筑波大学(茨城県・つくば市),

2012 年 9 月 10 日

安部 利之, On C_2 -coniteness of permutation orbifold models, Conference On Vertex Operator Algebras and Related Topics, 上海交通大学, 2012 年 8 月 26 日

安部 利之, Fusion products for the symplectic-fermionic vertex operator superalgebra, 第 29 回代数的組合せ論シンポジウム, 弘前大学(青森県・弘前市), 2012 年 6 月 19 日

安部 利之, Fusion rules for the symplectic fermionic vertex operator superalgebra, Conference on Vertex Operator Algebras, Finite groups and Related topics, Institute of Mathematics, Academia Sinica, 2011 年 12 月 18 日

安部 利之, 頂点作用素代数における Zhu の有限性条件の現在, 第 56 回代数学シンポジウム, 岡山大学(岡山県・岡山市), 2011 年 8 月 8 日

安部 利之, 置換オービフォールド模型の C_2 -有限性について, 第 23 回草津セミナー(群馬県・吾妻郡草津町), 2011 年 7 月 31 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安部 利之 (ABE, Toshiyuki)

愛媛大学・教育学部・教授

研究者番号: 30380215