様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４００２５
研究課題名（和文）ｐ進クリスタリン表現の合同関係

研究課題名（英文）Congruence relations between p-adic crystalline representations

研究代表者
服部　新（Hattori, Shin）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・助教

研究者番号：１０４５１４３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,600,000円、（間接経費）　780,000円

研究成果の概要（和文）：pを素数とする．本課題では，完備離散付値体のp進Galois表現の間の様々な合同関係についての研究を行った．p進Galois表現は整数論の重要な研究対象だが，本研究の目的は，それらの間の合同関係を用いて，研究が困難な場合を容易な場合に帰着する手法を開発することである．主要な成果として，混標数と等標数の完備離散付値体の絶対Galois群の間に，分岐群を法とした同型があることが証明できた．混標数（等標数）とは1をp回足して0にならない（なる）場合を言い，一般的には等標数の方が易しい．この成果によって，混標数（等標数）のp進Galois表現の研究を等標数（混標数）に帰着することができるようになった．

研究成果の概要（英文）：Let p be a rational prime number. In this project, I studied various congruence relations between p-adic Galois representations of complete discrete valuation fields. P-adic Galois representations are important objects for number theory. The aim of this project is to develop methods to reduce study of Galois representations to easier cases by using congruence relations. As the most important achievement in this project, I proved an isomorphism between absolute Galois groups of complete discrete valuation fields of mixed and equal characteristics modulo ramification subgroups. This result enables us to reduce study of Galois representations for complete discrete valuation fields of mixed (resp. equal) characteristic to that for equal (resp. mixed) characteristic.

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Galois表現　合同　分岐

１．研究開始当初の背景

p を素数，K をQ_pの有限次拡大，G_Kを K の絶対 Galois 群とする．G_Kの p 進表現 V に対し，そのG_K安定なZ_p格子 T を取り，T/pT の半単純化を$\bar{V}$と置く．$\bar{V}$は T の選び方にはよらずに V だけで決まり，これを V に伴う法 p 表現と呼ぶ．一方で，p 進 Hodge 理論によると，クリスタリン表現と呼ばれるよいクラスの p 進表現はフィルター付き Frobenius 加群と呼ばれる半線形代数的データで分類される．従って，V に伴うフィルター付き Frobenius 加群 D から$\bar{V}$の情報を読み取ることができるはずである．ところが，D から T を経ずに直接$\bar{V}$を構成することは難しく，p 進・法 p Langlands 対応の両立性とも関わる深い問題である．この問題は $K=Q_p$で V が二次元の場合にしか体系的に調べられておらず，一般の場合には方法論的な困難があった．

他方，ねじれクリスタリン表現の一種である有限平坦表現と呼ばれる表現の一系列に関して，混標数と等標数での同型対応が存在するが，剰余標数が奇素数の場合にこの同型対応が分岐を保つことが，私の以前の研究でわかっていた（分岐対応定理）．これは混標数局所体の p 進表現と等標数局所体の p 進表現の間の合同関係，とも見なせる．また，この定理を用いて私は，剰余標数が奇素数であるような混標数完備離散付値環上の Abel 多様体の標準部分群の過収束性を証明していた．分岐は$\bar{V}$のような表現の半単純化の情報を含む不変量であり，また等標数の数論は混標数よりも容易であることが多い．そこで，混標数と等標数の間でのこのような Galois 表現の対応をより一般に証明できれば，混標数 Galois 表現の諸問題を等標数に帰着できるだろうという期待が生じた．

２．研究の目的

以上のような背景に基づいて，本研究は p 進表現のもつ種々の合同関係の解明を目的としていた．具体的な研究目的は主に次の二点である．

(1) p 進クリスタリン表現 V に伴う法 p 表現$\bar{V}$を，V の分類データ D から復元する新しい手法の構築.

(2) 混標数と等標数の Galois 表現の間の新しい対応の構築.

(1)は，先行研究において，基礎体 K がQ_pの場合に(φ, Γ)加群や p 進 Langlands 対応を用いて調べられてきた問題だが，本研究では基礎体一般の場合を取り扱うことを視野に入れて研究を行った．

(2)は上述の分岐対応定理や，同じように混標数と等標数を結び付ける新しい手法である亜完全空間の理論の発展を受けたものである．どちらの手法でも中心的なアイデアは，法 p 巾還元を用いて混標数と等標数を結び付ける，という部分にある．本研究ではこのアイデアをさらに深化させることを目的にしていた．

３．研究の方法

(1)の p 進クリスタリン表現 V に伴う法 p 表現$\bar{V}$の研究について述べる．この方面の先行研究は，基礎体 K がQ_pの場合でしか進んでいない．それは，p 進表現の研究における基本的な道具である加群の理論が一般の K では複雑になり，また p 進解析との関係も不明だからである．本研究では基礎体 K によらない Kisin の(φ, N_∇)加群と整 p 進 Hodge 理論を用いて法 p 表現を調べた．整 p 進 Hodge 理論は，V から T を経て$\bar{V}$を作る操作に対応する D 側の理論であるが，これも基礎体 K が一般だと困難が多い．そこで本研究では，必要なら整 p 進 Hodge 理論をバイパスするために，$\bar{V}$を記述する関数解析的な不変量を模索する研究も行った．

また，(2)の異なる標数の Galois 表現の対応については，法素元巾を用いて混標数と等標数を結び付け，分岐理論を用いて双方を比較する，という手法を用いた．この種の問題に分岐理論を用いる理由は次のように言うことができる．例えば剰余体完全な完備離散付値環の古典的な分岐理論において，Galois 群の下付き分岐部分群は，整数環の法素元巾から決まる部分群として定義される．このように，分岐理論によって，法素元巾から Galois 表現の情報を取り出すことができる．従って，混標数と等標数を法素元巾で結びつけるタイプの Galois 表現の合同関係に対し，分岐理論の有効性が期待される．

４．研究成果

(1) 上述した Abel 多様体の標準部分群の過収束性を，剰余標数 2 の場合にも証明した（論文③）．証明の手法は以前と同様に等標数への帰着を用いるが，Cartier 双対の標準部分群に相当する部分群（共役 Hodge 部分群）を定義し，これを先に構成することで，剰余標数 2 の場合にあった困難を回避できた．この成果により，Siegel 保型形式に対する eigenvariety の幾何的構成が $p=2$ でも可能になった．また，p で消える標準部分群について，過収束する範囲の理論上の限界値を達成した．これは p 進 Siegel 保型形式の解析接続の観点から重要である．

(2) 上述した有限平坦表現の分岐対応定理は奇素数 p で消える表現に関する主張だが，任意の素数 p に対し，この定理の p で消えな

い場合への一般化に当たる定理を証明した．特に，混標数と等標数の間の有限平坦表現の分岐対応定理も $p=2$ の場合に拡張した．手法は以前のものとは異なり，クリスタリン Dieudonné 関手の忠実性に帰着する．この成果の意義は，分岐対応定理の一般化によって，有限平坦群スキームの下付き分岐部分群と呼ばれる部分群の統制が可能になったことである．下付き分岐部分群は古典的な対象だが，定義が易しい代わりにその性質を調べることは困難だった．しかし，下付き分岐部分群を用いるとこれまでに知られている部分群の系列（上付き分岐部分群，Harder-Narasimhan フィルトレーション）を用いるよりも強い主張が示せるようである．例えば，この成果の応用として，Abel 多様体の標準部分群の p で消えない場合の過収束性も大幅に改良した（論文①）．さらに，Rabinoff によって構成された Abel 多様体の標準部分群が，応用上必要な種々の性質（Hodge-Tate 核との関係など）を持っていることも証明した．

(3) 剰余体が完全とは限らない二つの完備離散付値体について，それらの整数環が素元巾を法として合同であれば，それらの絶対 Galois 群が分岐群を法として同型であることを証明した（論文②）．これは剰余体完全の場合の Deligne の定理の一般化であるが，証明の手法は Deligne の古典的手法とは本質的に異なり，亜完全空間を経由して混標数と等標数を結び付けることが鍵になる．この定理によって，混標数（等標数）完備離散付値体の絶対 Galois 群の有限モノドロミーな表現の研究を等標数（混標数）に帰着できるようになった．将来的には，Swan 導手の整数性の研究や，Langlands 対応の剰余体非完全類似の模索などの研究に応用が期待できる．

(4) 基礎体 K が Q_p の場合に，p 進クリスタリン表現に伴う (φ,N_∇) 加群を分類した．また，法 p Galois 表現の半単純化が，対応する (φ,Γ) 加群の Frobenius 写像のある種のスペクトルノルムで記述できることが分かった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Shin Hattori, On lower ramification subgroups and canonical subgroups, Algebra & Number Theory 8 (2014) 303--330，査読有，
10.2140/ant.2014.8.303

② Shin Hattori, Ramification theory and perfectoid spaces, Compositio Mathematica 150 (2014) 798—834，査読有，
10.1112/S0010437X1300763X

③ Shin Hattori, Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules for p=2, Journal of Number Theory 137 (2014), 142—159, 査読有,
10.1016/j.jnt.2013.11.004

〔学会発表〕（計 12 件）

① 服部 新, Ramification theory and perfectoid spaces, 代数的整数論とその周辺, 2013 年 12 月 10 日, 京都大学数理解析研究所.

② 服部 新, Ramification theory and perfectoid spaces, 南九州代数系集会, 2013 年 9 月 1 日, 鹿児島大学.

③ Shin Hattori, On lower ramification subgroups and canonical subgroups, The Asian Mathematical Conference 2013, 2013 年 7 月 1 日, 釜山国際展示場.

④ 服部 新, Ramification theory and perfectoid spaces, 玉原数論幾何研究集会 2013, 2013 年 6 月 6 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

⑤ Shin Hattori, On lower ramification subgroups and canonical subgroups, number theory seminar, 2013 年 3 月 5 日, 韓国高等研究所.

⑥ Shin Hattori, Formal group laws I, Geometrical perspective of topological modular forms, 2012 年 11 月 13 日, 東京大学.

⑦ Shin Hattori, Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules, p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 2012 年 10 月 30 日, 東北大学.

⑧ Shin Hattori, Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules, Rational points on curves, 2012 年 9 月 25 日, Oxford 大学.

⑨ Shin Hattori, Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules, Symposium on Arithmetic and Geometry, 2012 年 6 月 1 日, 九州大学.

⑩ Shin Hattori, Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules, Industrious Number Theory, 2012 年 2 月 18 日, 慶北大学.

⑪ Shin Hattori, Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules, East Asia Number Theory Conference, 2012 年 1 月 19 日, 台湾

大学.

⑫ Shin Hattori, Ramification correspondence of finite flat group schemes and its application to canonical subgroups, 玉原数論幾何研究集会 2011, 2011 年 6 月 1 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.

〔その他〕
ホームページ等

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~shin-h/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
服部　新（HATTORI, Shin）
九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：10451436

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：