

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 14 日現在

機関番号：17401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740026

研究課題名(和文)代数的ベクトル束のモジュライの研究

研究課題名(英文)Study of moduli of algebraic vector bundles

研究代表者

阿部 健 (ABE, Takeshi)

熊本大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：90362409

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：射影的代数多様体上の半安定層のモジュライ空間に関してstrange dualityと呼ばれる不思議な現象がある。これは然るべき二つのモジュライ空間上の直線束の大域切断の空間が双対の関係にある、という現象である。代数曲線上の場合にはほぼ証明されているが、代数曲面上の場合には未だ未解決の部分も多く、謎の多い現象である。本研究では、射影平面上またはK3曲面上のstrange duality予想について、いくつか部分的な場合を証明した。また、未解決である射影直線上の直交群束の場合のstrange dualityへの一歩として、一般テータ空間の分解定理を証明した。

研究成果の概要(英文)：There is a mysterious phenomenon called 'strange duality' in the study of moduli spaces of semistable sheaves on projective varieties. This is a phenomenon where the vector spaces of global sections of certain line bundles on certain two moduli spaces. In the case of curves, most strange dualities have been settled, but in the case of surfaces, there remain unsolved problems. In this study, we gave proofs to some cases of strange dualities for the projective plane and K3 surfaces. We also proved a factorization theorem for the spaces of generalized theta functions on the moduli of special orthogonal bundles.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ベクトル束 モジュライ

1. 研究開始当初の背景

G を代数群とし, 射影的代数曲線上の主 G 束のモジュライ空間を $M(G)$ と表す. $M(G)$ 上の直線束の大域切断のことを一般テータ関数と呼ぶ. Strange duality 予想とは, 「然るべき代数群の対 (G, H) に対し, $M(G)$ 上の然るべきレベルの一般テータ関数の空間と $M(H)$ 上の然るべきレベルの一般テータ関数の空間がベクトル空間として双対の関係にある」と主張する予想である. 異なるモジュライ上の一般テータの空間が双対の関係にあるというのは不思議な現象で, それゆえ strange duality と呼ばれている.

もっとも典型的な場合は $(G, H) = (SL(r), GL(n))$ の場合で, この場合は Belkale[1] と Marian-Oprea[2] によって証明されていた. また, $(G, H) = (Sp(2r), Sp(2n))$ の場合は研究代表者[3],[4]によって証明されていた. そのほかに strange duality が成り立つと期待されている場合は, $(SO(n), SO(m))$ の場合で, この場合はまだ未解決である. これを除いては, 曲線の場合には strange duality はほぼ解決済みという状況であった.

代数曲線上と同様の現象を次元を上げて代数曲面上で探すとというのは自然な問題意識である.

代数曲線上の strange duality の類似として, 90年代半ばに Le Potier は射影平面上の半安定層のモジュライ空間に対して strange duality 予想を提出していた. これは次のような予想である. $M(n)$ を射影平面上の階数 2 の半安定層で第 1 チャーン数が 1, 第 2 チャーン数が n であるもののモジュライ空間とする. $N(d)$ を射影平面上の純次元半安定層で第 1 チャーン数が d , オイラー数が 0 であるもののモジュライ空間とする. それぞれの上にならぶべく自然に定義される直線束, D, L がある. このとき, strange duality 予想は, 「 D の $M(n)$ 上の大域切断の空間と, L の $N(d)$ 上の大域切断の空間は双対の関係にある」と主張するものである.

Belkale や Marian-Oprea による, 上述の代数曲線上の strange duality の証明は, Quot スキーム上の交点理論を使うというものであった. 研究代表者による, 代数曲線上のシンプレクティック束に対する strange duality の証明はこれとは異なり, 代数曲線を結節点を持つ特異曲線に退化させ, 種数を下げる, という手法であった. 研究代表者[5] は, 「曲線の種数を下げる」という手法の類似として, 射影平面上の半安定層の「第 2 チャーン数を下げる」というアイデアを基に, quasi-bundle のモジュライ空間を用いて, $d=1, 2$ の場合に Le Potier の strange duality 予想を証明していた.

射影平面上の半安定層のモジュライに関する Le Potier の strange duality 予想は, 一般の場合には, 双対であると予想されている二つのベクトル空間の次元が等しいことすら分かっていない. D の $M(n)$ 上の大域切断の空間の次元は Gottsche-中島-吉岡[6]によって計算されていた. また, 研究代表者は, $d=4$ の場合に, L の $N(d)$ 上の大域切断の空間の次元を計算していた.

[1] P. Belkale: The strange duality conjecture for generic curves. J. Amer Math Soc, 21 (2008), no. 1, 235-258.

[2] A. Marian, D. Oprea: The level-rank duality for non-abelian theta functions. Invent. Math. 168 (2007), no. 2, 225-247.

[3] T. Abe, : Degeneration of the strange duality map for symplectic bundles. J. Reine Angew. Math. 631 (2009), 181-220.

[4] T. Abe : Strange duality for parabolic symplectic bundles on a pointed projective line. Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, Art. ID rnn121, 47 pp.

[5] T. Abe, : Deformation of rank 2 quasi-bundles and some strange dualities for rational surfaces. Duke Math. J. 155 (2010), no. 3, 577-620.

[6] L. Gottsche, H. Nakajima, K. Yoshioka : K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting. Pure Appl. Math. Q. 5 (2009), no. 3, Special Issue: In honor of Friedrich Hirzebruch. Part2, 1029-1111.

2. 研究の目的

(1) 研究開始当初の背景を踏まえると, 未解決である射影平面に対する Le Potier の strange duality 予想の解決を目指すのが自然であるが, 解決への手がかりが少ない状況では一度に予想解決を目指すのは現実的ではない. そこで, 研究代表者は, Le Potier の strange duality において双対であると期待される二つのベクトル空間の次元が一致するかどうかを調べることを最初の目的とした. 具体的には, $d=4$ の場合にうまくいった研究代表者による L の $N(d)$ 上の大域切断の空間の次元の計算を d が 5 以上の場合に行うことであった. また, $d=4$ の場合の計算は, 少なくともベクトル空間の次元としては, strange duality が成立することを示していたので, 実際に strange duality の duality map が全単射であるかどうかを調べることも目的としていた.

(2) 射影平面以外の代数曲面上に対して strange duality 現象を探すことも, 研究期間内の研究代表者の研究目的であった.

(3) 代数曲線に対しては, 成立すると期待される strange duality はほぼ解決済みであ

ったが、まだ直行群の場合の strange duality は未解決であるため、この場合の strange duality の主張の定式化及び主張の証明も研究の目的であった。

3. 研究の方法

(1) L の $N(d)$ 上の大域切断の空間の次元の計算の際には、 $d=4$ の場合に研究代表者が行った方法を用いる。具体的には、 $N(d)$ 上のテータ因子と coherent system のモジュライ空間を関係づけ、stability パラメータを変化させることにより、coherent system のモジュライ空間と射影平面上の点のヒルベルト概形を関係づけるという方法である。

(2) 射影平面以外の代数曲面に対しては、Marian, Oprea 等が $K3$ 曲面やアーベル曲面に対して strange duality を定式化して、いくつかの場合には証明している。彼らの手法は Fourier-向井変換を用いるものであるが、研究代表者は Fourier 向井変換を用いない代わりに曲線上の strange duality を用いるという方法をとる。

(3) 直行群の場合の曲線上の strange duality の研究の方法は、シンプレクティック束の場合に研究代表者が用いた方法を用いる。すなわち、非特異射影曲線を結節点を持った特異曲線に退化させる方法である。

4. 研究成果

(1) $d=4$ の場合に研究代表者が行った L の $N(d)$ 上の大域切断の空間の次元の計算を d が 5 以上の場合に拡張するため、まず $d=5$ の場合に調べてみた。その結果、 $N(5)$ 上のテータ因子への双有理かつ固有的な射をもつ coherent system のモジュライが、stability パラメータを変化させるとき、どのような blow-up と blow-down を起こすかを記述した。この結果は、2012 年 6 月に九州大学で発表した。

また、 $d=4$ の場合に Le Potier の strange duality に現れる双対写像が全射であることを示した。これにより特に、 $d=4$ で n が 6 以下の場合には、 $N(4)$ と $M(n)$ 上の直線束 L, D に対し strange duality が成立することが従う。この結果は、2012 年 12 月に佐賀大学で発表した。

(2) 射影平面以外の曲面に対し strange duality 現象を見つける研究において、次の結果を得た。 X を $K3$ 曲面とし、ピカール群が豊富直線束 H により生成されているとする。第一チャーン類が H でオイラー数が 0 である純 1 次元半安定層のなすモジュライ空間を N とし、行列式束が自明で第 2 チャーン数が n である階数 2 の半安定層のモジュライ空間を $M(n)$ とする。このような組 N と $M(n)$ に対しても、射影平面の場合と同様に、strange

duality が定式化できる。研究代表者は、この場合には strange duality が成立するという結果を得た。

この結果はある意味、射影平面に対する Le Potier の strange duality の $K3$ 曲面への類似が成立することを示している。この結果は、2013 年 9 月に京都大学で発表した。

(3) 代数曲線上の直行群束に対する strange duality に関する研究において、次の結果を得た。代数曲線上の接続層が構造層に値を持つ非退化対称双線形形式を持つとき直交層と呼ぶ。直交層の行列式束から構造層への射で双線形形式とある種の整合性を持つものを、直交層の向きと呼ぶ。接続層が局所自由の場合は、向き付直交層は主 S^0 束に他ならない。 C を結節点を持つ射影代数曲線とし、 M を C 上の向き付直交層のモジュライ空間とする。 C' を C の正規化とし、 M' を C' 上の放物的向き付直交層のモジュライ空間とする。 M 上には行列式直線束があり、これのべき乗の大域切断の空間が strange duality で考察の対象になるベクトル空間で、一般テータの空間と呼ばれる。研究代表者が得た結果は、向き付直交束に対しても一般テータの空間に対し分解定理が成立する、というものである。すなわち、 M 上の一般テータの空間が M' 上のいくつかの一般テータの空間の直和として表せる、という結果である。

代数曲線上のシンプレクティック束に対する strange duality の証明は、非特異代数曲線を結節点を持つ特異代数曲線に退化させ、そこにおいて一般テータの空間の分解定理を確立することにより、最終的に strange duality を曲線の種数が 0、すなわち射影直線上の放物的シンプレクティック束の場合に帰着させるというものであった。従って、この度得られた向き付直交束のモジュライ上の一般テータに対する分解定理は、直交束版の strange duality の解決に向けた一歩であると考えられる。この結果は、2011 年 10 月に城崎シンポジウムにおいて発表した。

(4) 最後に述べる結果も射影平面に対する Le Potier の strange duality に関するものであるが、研究期間当初には無かった新しいアプローチによる研究である。

研究結果の (1) の項でも現れたように、モジュライ空間を調べる際、そのモジュライ空間と双有理なモジュライを見つける、というのは基本的な手法である。双有理なモジュライを見つける一つの方法として、安定性を計るとき用いる偏極を動かすという方法がある。しかし射影平面のピカール数は 1 であるため、この偏極を動かす手法は使えなかった。Arcara-Bertram-Coskun-Huizenga[1] は、射影平面上の点のヒルベルト概形と双有理同

型な多様体として Bridgeland 半安定な層の複体のモジュライを考えヒルベルト概形の双有理幾何を調べた。同じ思想の下 Coskun-Huizenga-Woolf [2] は、射影空間上の半安定層のモジュライ空間の effective cone を完全に決定してしまった。これは、複体のモジュライとして双有理なモジュライを見つけ、それをういてもととの層のモジュライ空間の性質を調べるという手法である。

研究期間終盤に研究代表者が得た結果は、「射影空間上で strange duality を考える際、組の一方のモジュライの高さが 0 の場合は strange duality が成立する」というものである。

この結果は、「高さが 0」という仮定がついているものの、層の階数などには制限がなく成り立つ結果で、今後さらに発展させる可能性があると思われる。

[1] D. Arcara, A. Bertram, I. Coskun, J. Huizenga : The minimal model program for the Hilbert scheme of points on P^2 and Bridgeland stability, Adv. Math. 235 (2013), 580-626.

[2] I. Coskun, J. Huizenga and M. Woolf : The effective cone of the moduli space of sheaves on the plane, arXiv:1401.1613.

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1.
著者：阿部 健
論文標題：Strange duality for height zero moduli spaces of sheaves on P^2
雑誌名：The Michigan Mathematical Journal
査読：有り
巻：掲載決定だが未定
発行年：掲載決定だが未定
ページ：掲載決定だが未定

2.
著者：阿部 健
論文標題：Moduli of Oriented Orthogonal sheaves on a nodal curve
雑誌名：Kyoto Journal of Mathematics
査読：有り
巻：53 巻 1 号
発行年：2013
ページ：55 90

[学会発表](計 6 件)

1.
発表者：阿部 健
発表表題：An example of strange duality for K3 surfaces
学会等名：研究集会「Bundles over Surfaces and Eisenstein Periods for Loop Groups」
発表年月日：2014 年 7 月 1 日
発表場所：九州大学(福岡県福岡市)

2.
発表者：阿部 健
発表表題：An example of strange duality for K3 surfaces
学会等名：研究集会「代数幾何学と可積分系におけるモジュライ理論」
発表年月日：2013 年 9 月 18 日
発表場所：京都大学(京都府京都市)

3.
発表者：阿部 健
発表表題：Surjectivity of the strange duality map for P^2 in the case $c_1=4$
学会等名：研究集会「第二回若手代数複素幾何研究集会」
発表年月日：2012 年 12 月 18 日
発表場所：佐賀大学(佐賀県佐賀市)

4.
発表者：阿部 健
発表表題：On the moduli space of pure one-dimensional sheaves with $c_1=5$ and $X=0$ on P^2
学会等名：研究集会「Symposium on Arithmetic & Geometry」
発表年月日：2012 年 6 月 1 日
発表場所：九州大学(福岡県福岡市)

5.
発表者：阿部 健
発表表題：一般テータ関数の空間の strange duality 現象について
学会等名：日本数学会年会・代数学分科会総合講演
発表年月日：2012 年 3 月 27 日
発表場所：東京理科大(東京都新宿区)

6.
発表者：阿部 健
発表表題：Moduli of oriented orthogonal sheaves on a nodal curve
学会等名：城崎シンポジウム
発表年月日：2011 年 10 月 28 日
発表場所：城崎大会議館(兵庫県豊岡市)

6. 研究組織
(1)研究代表者
阿部 健 (ABE, Takeshi)
熊本大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号：90362409