様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２７ 日現在

機関番号：３２６４４
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００２８

研究課題名（和文）スケール付き極小モデル理論を用いた高次元ファノ多様体の研究

研究課題名（英文）A study on higher dimensional Fano manifolds using the minimal model theory with scaling

研究代表者
月岡　透（Tsukioka, Toru）

東海大学・理学部・講師

研究者番号：３０５０８４０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：高次元のファノ多様体を端射線収縮の観点から研究した。小収縮を持つファノ多様体について具体例を構成し、それらの性質を調べた。曲線と余次元が２の部分多様体を中心とするブローアップにより、小収縮を持つ代数多様体を構成できることが知られている。この構成法によって得られるファノ多様体の分類を考察し、射影空間の直積をブローアップした場合について詳しく調べた。また、小収縮の例外集合は一般に複数個の既約成分よりなるが、特別な場合について、既約成分がひとつであるための十分条件を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied higher dimensional Fano manifolds using the theory of extremal contractions. We gave examples of Fano manifolds with small contractions and investigated their property. It is known that by the successive blow-up along a curve and a subvariety of codimension 2, we can get projective varieties with small contractions. We have considered Fano manifolds obtained by this construction. The case of blow-ups of the products of projective spaces are studied in detail. On the other hand, we study on the number of irreducible components of exceptional sets of small contractions. In a special case, we obtained a sufficient condition for this number to be one.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ファノ多様体

１．研究開始当初の背景

（1）代数幾何学では、代数方程式によって定義される図形（代数多様体）を研究対象とする。基本的な問題は、代数多様体の分類問題であり、古くから研究されてきた。代数多様体は、おおまかには「小平次元」を使って分類される。小平次元が負、０、正、の３種類に分けて考えるのが基本的である。ファノ多様体は、「反標準因子が豊富な代数多様体」として定義され、小平次元が負となる代数多様体を構成する重要な多様体である。ファノ多様体のいちばん簡単な例は、射影直線であり、これは（複素数体上で考えれば、位相的に）球面と同じである。このことから推察されるように、ファノ多様体は球面のようにふくらんだ図形であると考えられる。実際、ファノ多様体は「有理的連結性」という幾何的に著しい性質を持っており、いたるところ有理曲線で覆われている。ファノ多様体に対するこのような観点は１９８０年代以降の比較的新しいものであるが、歴史的には有理多様体の一般化として、１９３０年代以降、様々な形で研究されてきた。

（2）ファノ多様体は、ある種の特異点を持つ場合も含めて考察すべきだが、以下では非特異な場合に限定して述べる。実際、非特異ファノ多様体を考えることは基本的であり、高次元ではさまざまな問題が残っている。ファノ多様体が他の多様体のクラスにくらべて特徴的な性質は、その「有界性」にある。つまり、ファノ多様体は次元を固定すれば有限個の変形同値類をなすことが分かっている。このことから、明示的な分類が理論上は可能となる。実際、１次元は射影直線のみであり、２次元の場合は、射影平面、射影直線の直積、射影平面の高々８点でのブローアップの１０種類に分類される。これらは、リーマン面の理論やイタリア学派の代数曲面論により、定義や用語の違いこそあれ、１９世紀後半までには得られていた分類結果である。３次元の場合はより複雑で、イスコウスキー、藤田、ショクロフ、森・向井らの一連の研究により、１９７０年から１９８０年代にかけて分類され、結果的に１０５個の変形型よりなることが分かっている。

（3）ピカール数（第２ベッチ数）が２以上のファノ多様体の分類には、森・向井の論文で示されたように、端射線収縮の理論が有効である。２０００年代以降、極小モデル理論（端射線収縮の理論を含む）はさらに発展し、高次元ファノ多様体に対しては、ピカール数の上限問題への応用もなされるようになってきている。ファノ多様体の有界性により、次元を固定すれば、ピカール数は上限を持つことが分かる。実際、分類結果により２次元の場合のピカール数の上限は９であり、３次元の場合は１０である。４次元の場合は１８であると予想されている。

２．研究の目的

（1）ピカール数が２以上のファノ多様体の分類問題を考える。ピカール数が２以上という条件から、曲線の錐体（クライマン・森錐）には、少なくとも２本の端射線が存在し、端射線収縮と呼ばれる特別な性質を持った写像が定まる。これらの収縮写像を使って、ファノ多様体に対して、意味のある分類をする。特に、４次元ファノ多様体の分類について研究し、興味深い場合（たとえば小収縮などの特殊な端射線収縮射を持つ場合）を詳しく分類する。曲線と余次元２の部分多様体に沿って順番にブローアップすると、小収縮を持つ射影多様体が得られるので、この構成によりファノ多様体をどれだけ作ることができるか明示的な分類結果を得る。ファノ多様体は有界性を持つので、次元を固定すれば、小収縮の既約成分の個数は上限を持つ。したがって、最大で何個の既約成分を持つかという部分的な問題が考えられる。特に、例外集合が既約になるための十分条件を求める。

（2）ファノ多様体の曲線の錐体は単体になるとは限らない。たとえば、２次超曲面を同一直線上にはない２点でブローアップすると、ピカール数３のファノ多様体になるが、曲線の錐体には４本の端射線が存在する。このように、ファノ多様体の曲線の錐体は、一般に複雑である。そこで、種々の具体例について曲線の錐体と、その双対錐体であるネフ錐体の構造を明らかにする。ネフ錐体も有限個の端射線から生成されるが、それぞれの端射線を生成する因子がどのようなものか調べ、さまざまな場合について具体的に記述する。分類結果を整理して、ネフ錐体の端射線を生成する因子と、ファノ多様体の幾何構造の間にどのような関係があるか明らかにするための基礎作りをする。

３．研究の方法

（1）一般に、代数多様体には「曲線の錐体」が対応する。これは、代数多様体上の曲線（より一般に１次元輪体）を数値的同値類で考えたときに、有効曲線に対応する部分である。極小モデル理論の基本定理のひとつである「錐体定理」によれば、標準因子との交点数が負になる部分は局所的に有限個の端射線によって生成され、さらに「収縮定理」により、これらの端射線は、もとの代数多様体が持つ収縮射（有理曲線をつぶす写像）に対応する。たとえば、射影直線と射影平面の直積を考える。このとき、曲線の錐体は２本の端射線によって生成される。これらの端射線は相異なる方向のファイバー（より正確には、射影直線と射影平面内の直線）に対応し、これらのファイバーを１点につぶす射影が、この場合の端射収縮射である。ファノ多様体の場合は、曲線の錐体は非常に簡明な構造を持ち、有限個の端射線によって生成される。し

たがって、これらの端射線に付随する収縮射の構造を決めれば、理論上はファノ多様体の幾何構造が復元されることになる。実際、森・向井によるピカール数が２以上の３次元非特異ファノ多様体の分類はこの考えに基づいている。当然４次元以上でも同様の手法が適用できる。しかしながら、４次元以上では、端射線収縮の種類は極めて多いので、それにともなって４次元ファノ多様体の種類も膨大になる。また、因子（輪体）の交点理論も複雑になる。したがって、ある種の条件を付した状況下で、４次元以上のファノ多様体を研究するのが現実的である。これについては、次のような方法が考えられる：まず、３次元ファノ多様体の例を自然な形で一般化し分類する（たとえば、３次元射影空間の１点ブローアップであれば、一般次元への拡張として、射影空間の１点、直線、平面などのブローアップが考えられる）。次に、端射線の種類をひとつ固定して分類する（たとえば、ファイバー型の収縮射が存在する場合のファノ多様体の分類）。しかしながらこれでも漠然としているので、端射線の種類を「小さな収縮写像」（小収縮）を持つ場合に限定して考えるのも十分意味がある。

(2) 小収縮は非特異３次元代数多様体に対しては起こらず、４次元以上特有の興味深い現象である。まず、曲線と曲面のブローアップを組み合わせて小収縮を持つ４次元代数多様体が構成できることに注意する。そこで、この多様体がいつファノ多様体になるかを調べる。これにより、もちろんすべてではないが、小収縮を持つ４次元ファノ多様体をたくさん作ることができる（ただし、この場合ピカール数は高々５であるので、ピカール数の上限問題にはあまり関係がなくなってしまう）。

(3) 研究方法としては、以上のように端射線収縮を用いてファノ多様体を分類するのが基本的であるが、曲線の錐体のみならず、因子の錐体である「ネフ錐体」や「擬有効錐体」を具体的に記述することも重要である。曲線の錐体の端射線は、有理曲線によって生成されるが、ネフ錐体の端射線は因子によって生成されるので、その因子が多様体としてどのようなものかを調べることは、研究手法を洗練する観点において意義がある。

４．研究成果

(1) 代数多様体に付随する端射線収縮には、ファイバー型と双有理型のふたつがある。前者は行き先の次元が低くなる写像であり、後者は次元を変えない写像である。双有理型には、例外集合の余次元が１である「因子型収縮」と例外集合の余次元が２以上である「小収縮」がある。ブローアップなどの基本的な双有理射は因子型であるので、小収縮の方がより複雑であるが、そのぶん幾何学的には興味深い。そこで、小収縮を持つファノ多様体について調べた。因子型端射線収縮の例外集合は必ず既約になるが、小収縮の例外集合は、一般に複数個の既約成分よりなる。実際、曲線と曲面のブローアップをうまく組み合わせることにより、既約成分が複数個存在するような小収縮を構成できることが知られている。この場合、それぞれの既約成分はブローアップの中心である曲線と曲面の交点に対応する。もちろんこのような構成によって得られる代数多様体は、ファノ多様体になるとは限らない（むしろ稀である）。したがって、どのような射影多様体をブローアップすれば、ファノ多様体になるか考えるのは意味がある。たとえば、４次元射影空間のブローアップを考える。中心として、直線と２次曲面の和集合を考える。直線と２次曲面が１点のみで交わるときは、対応する小収縮の例外集合は既約であるが、２点で交わるときは、それに応じて、例外集合はふたつの既約成分よりなる。ファノ多様体は有界性を持つので、次元を固定すれば、小収縮の既約成分の個数は上限を持つ。したがって、最大で何個の既約成分を持つかという問題が考えられる。残念ながら、完全な解答は得られなかったが、いくつかの特別な場合には、既約成分はひとつしかないことを証明した。たとえば、特徴的な場合として、ブローアップの途中でファノでない多様体を経由する場合があるが、この場合については、最終的に得られる多様体が小収縮を持つファノ多様体であれば、例外集合の既約成分がひとつであることを示した。既約成分の個数が３以上の例は見つかっておらず、最大個数が２であるかどうかを決定するのは、今後の課題である。

(2) また、以上のように構成された多様体が実際にファノ多様体になっていることを確認するには、ネフ錐体の構造を決定する必要がある。そこで、さまざまな具体例についてこれを計算した。特に、射影空間のふたつの直積をブローアップした場合について詳細な記述をした。ネフ錐体は有限個の端射線から生成されるが、それぞれの端射線を生成する因子がどのようなものか調べ、さまざまな場合について具体的に記述した。たとえば、４次元射影空間を非特異２次曲線に沿ってブローアップするとファノ多様体となるが、このネフ錐体はふたつの端射線から生成される。生成元となる因子は、３次元の代数多様体になるが、これらは３次元２次超曲面の２次曲線に沿ったブローアップと３次元射影空間の２点ブローアップである。前者は３次元ファノ多様体であるが、後者はそうではない（弱ファノ多様体にはなっている）。このように、ネフ錐体の端射線は曲線の錐体のそれよりも多くの情報を持っており、詳しく調べることによって、ファノ多様体の大域的な幾何構造をうまく決定することができると思われる。

(3)今後の展望としては、これらのネフ錐体に関する考察をまとめて、４次元以上のファノ多様体をより精密に調べることが考えられる。たとえば、ネフ錐体の生成元に対応する因子がすべて非特異射影多様体に線形同値であり、しかもファノ多様体になっている場合、一般次元であっても幾何構造が限定されそうである。このような特殊な場合の分類問題が今後の課題として提案できる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① 月岡　透、特殊な双有理射を持つ４次元ファノ多様体（Fano 多様体の最近の進展）、数理解析研究所講究録 1897、査読無、2014、117--127

〔学会発表〕（計 7 件）

①月岡　透、Fano manifolds with small contractions、Lefschetz Properties、２０１５年３月１３日、ゲッチンゲン大学数学研究所（ドイツ）

②月岡　透、小収縮を持つファノ多様体について、代数幾何シンポジウム２０１４in 岐阜、２０１５年1月１１日、大垣ソフトピアジャパンセンタービル（岐阜県・大垣市）

③月岡　透、Some remark to Fano fourfold with small contractions 、 The Fourth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics、２０１４年３月１９日、東海大学湘南キャンパス（神奈川県・平塚市）

④月岡　透、特殊な双有理射を持つ４次元ファノ多様体、Fano 多様体の最近の進展、２０１３年１２月１７日、京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

⑤月岡　透、On Fano 4-folds with special birational contractions、One day workshop on Complex Geometry、２０１３年9月２８日、大阪大学理学研究科（大阪府・豊中市）

⑥月岡　透、 Fano varieties and the Hard Lefschetz Theorem、Workshop in Hawaii: Aspects of SLP and WLP、２０１２年9月１４日、Tokai International College in Hawaii （アメリカ合衆国）

⑦月岡　透、 ファノ多様体の端射線の長さと向井予想、第１１回可換環論と鏡映群の表現論研究集会、２０１２年3月９日、東海大学湘南キャンパス（神奈川県・平塚市）

６．研究組織

(1)研究代表者

月岡　透（TSUKIOKA,Toru）
東海大学・理学部・講師
研究者番号：30508403