

平成 27 年 9 月 16 日現在

機関番号：32503

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740029

研究課題名(和文) 保型形式の構成および、その数論的性質の研究

研究課題名(英文) The construction of the modular forms and the study of its arithmetic properties

研究代表者

軍司 圭一 (Gunji, Keiichi)

千葉工業大学・工学部・助教

研究者番号：00550659

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：現代の整数論においては、保型形式と呼ばれるある種の変換公式をみたす関数の研究が大きなテーマとなっている。多変数の保型形式は一般には解析が非常に難しいが、一変数の保型形式からリフトと呼ばれる方法で構成される多変数保型形式があり、これは比較的解析が簡単なうえに、多くの興味深い数論的性質を備えている。今回の研究において、従来から知られていたリフトの構成の拡張について考察をした。

研究成果の概要(英文)：Recently, for the study of the number theory, investigating modular forms, that are functions satisfying the certain transformation formula, is the main topics. The analysis of the modular forms of several variables is difficult in general. However we can construct them by using the methods of lifting, from the modular forms of one variable. Such lifts are relatively easy to analysis, and have many interesting arithmetic properties. In this study, we extend the results of the lifting, which are already known.

研究分野：代数学

キーワード：整数論 多変数保型形式 アイゼンシュタイン級数

1. 研究開始当初の背景

(1) 現在の整数論において、保型形式と呼ばれる関数の研究は基本的かつ非常に重要な地位を占めている。特に保型形式から定まる L 関数と呼ばれる関数は、保型形式の持つ数論的性質を映し出す鏡のようなものであり、その研究こそが現代における整数論の研究といっても過言ではない。保型形式にも様々なものがあり、最も古くから研究されてきたものは楕円保型形式と呼ばれ、多くの結果が得られている。一方で、それを発展させた多変数の保型形式は、多変数ゆえの難しさからか、未だ多くのことが解明されていない。

(2) 楕円保型形式から多変数の保型形式を構成する、リフティングと呼ばれる手法がある。これは多変数の保型形式を構成し、元の楕円保型形式とは L 関数を通じて繋がっているという特徴がある。一番最初に発見されたものは Saito-Kurokawa リフトと呼ばれ、楕円保型形式から 2 次の Siegel 保型形式を構成するものであった。その後、京都大学の池田保氏により、一般の $2n$ 次の Siegel 保型形式を構成する Ikeda リフトと呼ばれるものが構成された。もともとは Duke-Imamoglu により存在は予想されていたが、池田氏は存在を証明したのみならず、具体的な構成方法まで与えることに成功した。一方で、元の Saito-Kurokawa リフトはフルモジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ に関する保型形式のリフトであったが、レベル構造を付加し、より小さい群に関する保型形式のリフトを構成する試みもなされていた。これに関する結果は大阪大学の伊吹山知義氏により完全な形で与えられている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、池田氏と伊吹山氏の結果を融合し、レベル付きの楕円保型形式から、レベル付きの $2n$ 次の Siegel 保型形式を構成することである。先に述べた通り、もともとの Ikeda リフトは Saito-Kurokawa リフトの一般化であり、次数が 2 の場合に制限すると、Saito-Kurokawa リフトと完全に一致している。よってこの問題は、次数が 2 の場合には伊吹山氏によって既に解決されていることになっている。しかし 2 つのリフトは結果的には一致するものの、構成の仕方が違うため、見かけ上は異なっており、ダイレクトに結果が得られるわけではない。Ikeda リフトのレベル付の場合が得られれば、これは

保型形式の構成に大きく役立つ。さらにフルモジュラーの場合においては、Koecher-Maass 級数の計算や、 L 関数の特殊値と Peterson ノルムとの関係など、数論的に興味深い結果が多く得られている。それらのレベル付の場合の考察は、非常に面白い問題であるといえる。

3. 研究の方法

(1) レベル付 Ikeda リフトの構成にあたっては、以下の 2 つのステップで行う。

伊吹山氏によって得られたレベル付き Saito-Kurokawa リフトを、Ikeda リフトの構成の仕方で書き直す。

2 次のレベル付き Ikeda リフトの結果から、一般の次数の Ikeda リフトの形を予想し、証明する。

(2) オリジナルの Ikeda リフトの構成にあたっては、Eisenstein 級数と呼ばれる特殊な保型形式が利用されている。正確に述べると、次数 $2n$ の Siegel-Eisenstein 級数と呼ばれる保型形式を考え、その Fourier 級数展開を計算する。重要な性質として、Fourier 係数は Euler 積表示と呼ばれる、各素数ごとに定義された因子 (Euler 因子と呼ばれる) の積となることが示される。Siegel 保型形式の Fourier 係数は、素数 p に対する Euler 因子 $\tilde{F}_p(X)$ に、 $X = p^{-k-1/2}$ (保型形式の重さを $k+n$ とおいた) を代入することで与えられるが、Ikeda リフトでは、 p^{-k} の代わりに、出発点となる楕円保型形式の Satake パラメーター α_p を X に代入することで構成される。

(3) この構成をレベル付の場合に適用するには、大きな問題が生じる。それはフルモジュラー群に関する Eisenstein 級数はただ一つに定まるが、レベル付きの場合には cusp の数に応じた、複数の Eisenstein 級数が選べるという点にある。そのため、まずは Eisenstein 級数のなす空間についての考察が必要となる。

4. 研究成果

我々は、レベルを奇素数 p の場合に限定して考察を行った。

(1) 先に述べたとおり、まずは Eisenstein 級数のなす空間について調べなくてはならない。次数 2 の場合に伊吹山氏により得られているレベル付の Saito-Kurokawa リフトであるが、このリフトは $U(p)$ -作用素と呼ばれる、特別な Hecke 作用素と可換であることが伊吹山氏によって示されている。よって、もしこのリフトが Eisenstein 級数の

言葉でかけるのであれば、当然それは $U(p)$ -固有関数となっていることが期待される。Eisenstein 級数の空間への $U(p)$ -作用に関しては、以下の Boecherer による補題が本質的となる。

補題 1 $\mathcal{E}_k(\Gamma_0^n(p))$ で、次数が n 、レベルが p の重さ k の Siegel-Eisenstein 級数の空間を表す。このとき $\dim \mathcal{E}_k(\Gamma_0^n(p)) = n + 1$ 。

$\mathcal{E}_k(\Gamma_0^n(p))$ における作用素 $U(p)$ の固有値は

$$p^{jk-j(j+1)/2}, \quad 0 \leq j \leq n$$

で与えられる。特に各固有空間は 1 次元である。

$E_k^n(Z)$ を次数 n 、重さが k のフルモジュラー群に関する Eisenstein 級数とすると、 $\{E_k^n, E_k^n|U(p), E_k^n|U(p^2), \dots, E_k^n|U(p^n)\}$ は、 $\mathcal{E}_k(\Gamma_0^n(p))$ の基底をなす。

これから次の命題が得られる。

命題 1 $\tilde{E}_k^n(Z) = E_k^n(Z)|\prod_{j=1}^n(U(p) - p^{kj-j(j+1)/2})$ とおく。このとき $E_k^n(Z) \in M_k(\Gamma_0^n(p))$ は $U(p)$ -固有関数であり、固有値は 1 である。

$\tilde{E}_k^n(Z)$ の Fourier 係数は、本質的には、 $E_k^n(Z)$ の Fourier 係数から、Euler p -因子を取り除いたものとして与えられる。

この $\tilde{E}_k^n(Z)$ がレベル付の Ikeda リフトを与える候補となる。

(2) 構成をより具体的に書くために、記号をいくつか準備する。まず f を重さが $2k$ である Hecke 固有な楕円 cusp 形式とし、その Fourier 展開を $f = \sum_{n \geq 1} a(n)q^n$ で表す ($q = e^{2\pi i \tau}$)。 h を f と Shimura 対応で対応する重さ $k+1/2$ の保型形式とし、 $h = \sum_{n \geq 1} c(n)q^n$ をその Fourier 展開とする。 h が Kohnen のプラス空間に入っているという仮定から、 $(-1)^k n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ でなければ $c(n) = 0$ となる。 f の Satake パラメーター α_q を、各素数 q に対して $1 - a(q)q^{k-1/2} + q^{2k-1} = (1 - \alpha_q q^{k-1/2})(1 - \alpha_q^{-1} q^{k-1/2})$ で定める。

Ikeda リフトの Fourier 係数を具体的に書くために、次のように記号を準備する。 B を行列サイズが $2n$ の正定値な半整数対称行列とする。この B が Fourier 展開のパラメーターとなる。 $\det(2b) = \delta_B f_B^2$ と書く。ここで δ_B は 2 次拡大

$\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^n \det(2B)})/\mathbb{Q}$ の判別式であり、 $f_B > 0$ とする。 $\tilde{F}_q(B, X)$ で、次数が $2n$ 、重さが $k+n$ の Eisenstein 級数 E_{k+n}^{2n} の、Fourier 係数の多項式部分と呼ばれる Euler q -因子を表す。 $q \nmid f_B$ ならば $\tilde{F}_q(B, X) = 1$ であるため、 $\prod_q \tilde{F}_q(B, X)$ はすべての B に対して意味を持つ。さて各 B に対して

$$A(B) = c(\delta_B) f_B^{k-1/2} \prod_{q|f_B} \tilde{F}_q(B, \alpha_q)$$

とおく。このとき $\sum_B A(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(BZ))$ は重さ $k+n$ の Siegel cusp 形式となる。これがオリジナルの Ikeda リフトの構成である。

レベル付の場合を考えるには、これを少し修正する必要がある。使うべき Eisenstein 級数は先に述べた $\tilde{E}_{k+n}^{2n}$ であるが、これは E_{k+n}^{2n} と比べると、Fourier 係数から Euler p -因子をとりのぞくという違いが生じていた。それを反映させるため、以下のような修正を行う。

$\det(2B) = \delta'_B (f'_B)^2$ とする。ここで、 $f_B = p^r f'_B$ 、 $(p, f'_B) = 1$ によって f'_B を定める。すなわち $\delta'_B = p^{2r} \delta_B$ である。言い換えると、 f_B に生じる p べきの部分を δ 側に押し付けたのが、 δ'_B, f'_B である。このとき

$$K(B) = c(\delta'_B) (f'_B)^{k-1/2} \prod_{q|f'_B} \tilde{F}_q(B, \alpha_q)$$

とおく。素数に関する積は、 $q|f'_B$ としているため、仮定より素数 p に関する積は除外されている。

予想 1 $\sum_{B>0} K(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(BZ))$ は重さ $k+n$ の Siegel cusp 形式を与えるだろう。

(3) 今回の研究において、次の定理を示した。

定理 1 $n = 1$ 、すなわち次数 2 の Siegel 保型形式の場合を考える。このとき

$$\sum_B K(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(BZ))$$

は、伊吹山氏の与えたレベル付き Saito-Kurokawa リフトと一致する。特に、これは重さ $k+1$ の cusp 形式である。

すなわち上の予想は、伊吹山氏の与えたレベル付き Saito-Kurokawa リフトを拡張した予想になっていることがわかる。

上の予想を一般に証明するためには、出発点である楕円保型形式 f が、new form と呼ばれるも

のか, old form であるかを区別して考える必要がある. f が old form であるとは, f は本質的にフルモジュラー群に関する保型形式であるという意味で, それをあえてレベルが p の保型形式とみなして持ち上げた時にどうなるか, ということである. 伊吹山氏の Saito-Kurokawa リフトの拡張の論文では, 2つのリフトの関係性が既に示されていたが, そのままでは高次元の場合は扱いづらい. これを Hecke 作用素, 特に $U(p)$ -作用素の言葉で書き直したのが次の命題である.

命題 2 $n = 1$ とする. f をフルモジュラー群に関する保型形式とし, 2つの持ち上げ

$$F(Z) = \sum_B A(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(BZ))$$

$$G(Z) = \sum_B K(B) \exp(2\pi i \operatorname{Tr}(BZ))$$

を考える.

$V = \langle F|U(p^i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rangle_{\mathbb{C}}$ とすると, $U(p)$ の V における作用の固有値は, $p^k, p^{k-1/2}\alpha_p, p^{k-1/2}\alpha_p^{-1}$ で与えられる.

$F(Z)$ と $G(Z)$ には

$$G(Z) = p^{3-2k} \times$$

$$F|(U(p) - p^k)(U(p) - p^{k-1/2}(\alpha_p + \alpha_p^{-1}))$$

という関係がある.

この命題は, 逆に伊吹山氏の結果の再証明, すなわち old form f に関しての G の保型性を示しているとも見える. すなわち, 一般の次数においても, このタイプの関係性を示すことができれば, old form f の保型性を証明したことになる. そしてこの命題は, F の $U(p)$ -固有値ですべてが統制されているため, 次の補題とあわせて, 一般の次数の場合の拡張を強く示唆している.

補題 2 n を一般とする. f をフルモジュラー群に関する重さ $2k$ の楕円保型形式, α_p を Satake パラメーターとし, F を f の Ikeda リフト (重さ $k+n$) とする. $V = \langle F|U(p^i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rangle_{\mathbb{C}}$ とすると, V における $U(p)$ 作用の固有値は

$$p^{(2n-j)j/2+n(k-1/2)}\alpha_p^{n-j}, \quad 0 \leq j \leq 2n$$

で与えられる. さらに各固有空間は 1 次元である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者および連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. Keiich Gunji : “On the Siegel Eisenstein series of degree two for low weights”, Journal of Mathematic Society of Japan, 掲載決定 (査読有), 2015 年

<http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/inpress.html>

2. Keiichi Gunji : “The dimension of the space of Siegel Eisenstein series of weight one. II”, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 掲載決定 (査読有), 2015 年

<https://rikkyo.repo.nii.ac.jp/>

[学会発表] (計 2 件)

1. 軍司圭一 “On Ikeda’s lift of level p ”, 2014 年 8 月 10 日, 愛媛大学ミニ研究集会, 愛媛大学理学部 2 号館 (愛媛県松山市)
2. 軍司圭一 “自明指標に付随する分岐 Siegel 級数の計算”, 2013 年 6 月 22 日, 保型形式整数論月例セミナー, 東京大学大学院数理学研究科 (東京都目黒区)

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者 軍司 圭一 (Keiichi Gunji)

千葉工業大学・工学部・助教

研究者番号: 00550659