様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　　６　月　１８　日現在

機関番号： １０１０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2011～2014
課題番号： ２３７４００３０

研究課題名（和文）対数幾何学における代数的K理論の類似物の研究とその数論幾何・代数幾何への応用

研究課題名（英文）A study of log-geometric analogues of algeraic K-theory and its application to arithmetic and algebraic geometry

研究代表者
萩原　啓（HAGIHARA, Kei）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・研究員

研究者番号：３０５１２１７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：代数幾何・数論幾何において重要な不変量の一つである代数的K理論の、対数的幾何学における類似物の諸性質について、KummerエタールK群およびそれを用いて定式化される対数的Grothendieck-Riemann-Rochの定理を中心に研究するとともに、その代数幾何・数論幾何への応用について考察する。

研究成果の概要（英文）：We study several properties of log-geometric analogues of algebraic K-theory, which is one of the most important invariants in arithmetic and algebraic geometry, focusing on those of Kummer etale K-groups and logarithmic Grothendieck-Riemann-Roch theorem formulated by them.
We also consider their applications to algebraic and arithmetic geometry.

研究分野： 数論幾何学

キーワード： 代数的K理論　対数的幾何学　代数的サイクル

１．研究開始当初の背景

Kummer エタール K 群を始めとする、代数的 K 群の対数幾何学における類似物に対し、Grothendieck-Riemann-Roch の定理を始めとする諸性質を調べ、またその代数幾何・数論幾何における応用について考察することが本研究の目的である。

そもそも、Riemann-Roch の定理とは、コホモロジー群を始めとする代数多様体の不変量を計算する際に必要不可欠な、代数幾何学における最も重要な定理の一つである。数論的観点からは、例えばモジュラー曲線などに適用することで、保型形式と呼ばれる数論的に大変重要な函数のなすベクトル空間の次元を計算できることなどが重要な応用としてある。Grothendieck によってこの定理は、代数的 K 理論の言葉で定式化され、また、相対的な場合にまで、即ち代数多様体の間の固有射に対し、拡張されている。

一方、対数幾何学とは、退化する代数多様体やコンパクト化された代数多様体の系統的な研究の為に Fontaine-Illusie-加藤らによって始められた代数幾何学の一分野であり、そこでは、通常の代数幾何学で扱われる代数多様体を一般化した対数的代数多様体が研究対象となる。

代数多様体に関する理論や現象は多くの場合、対数的代数多様体のカテゴリーにまで拡張することができるであろうというのが対数幾何学に携わる者の信念であり、実際今日では、対数的エタールコホモロジー、対数的クリスタリンコホモロジー、対数的 Hodge 理論といった数々の理論が構築されており、代数多様体の退化や開多様体の研究への応用などを通じ、従来の数論幾何・代数幾何へ与えるこれらの影響は大きい。

そこで私は以前より、対数的代数多様体に対して、代数多様体の不変量である代数的 K 群の拡張として Kummer エタール K 群という不変量を導入し、この不変量の様々な性質について考察するとともに、これに対する Riemann-Roch の定理の定式化および証明に取り組んできており、本研究開始時点においては、「スムーズかつ対数的スムーズ」と呼ばれる大きなクラスの対数的代数多様体の構造射については、Riemann-Roch の定理の対数版が成立することを確認していた。

この(スムーズかつ対数的スムーズな対数的代数多様体に対する)対数的 Riemann-Roch の定理の特筆すべき点は、従来の Riemann-Roch の定理が Todd 類に起因する Bernoulli 数を含む項を持つのに対して、一般 Bernoulli 数が現れることであり、このことは数論的に深い現象と関連することを期待させるものである。

対数的 Riemann-Roch の定理は、単に既存の定理に対してその考察の範囲を広げただけに留まらず、通常の代数多様体に対しても従来の定理より精密な情報を与えてくれる。それについて、先に挙げたモジュラー曲線を例にして説明する。

モジュラー曲線とは、上半平面 H を特殊線型群の部分群Γで割った後、適切にコンパクト化することで構成される代数曲線である。

この曲線は、そのコホモロジーが保型形式の空間と同一視できる(従って数論的に大変重要な曲線である)訳であるが、Γが特殊線型群の正規部分群である場合、このベクトル空間には自然にその商群 G の作用を持つ。従って単にコホモロジーの次元だけでなく、そこへの群 G の作用、すなわちその表現論的性質も重要な問題となってくる。

実際この問題は、古くは Hecke によって“fundamental problem”として提示され、Hecke 自身もΓが主合同部分群の場合に商群 G の作用を研究し、その結果、虚 2 次体の類数との数論的に興味深い繋がりを発見している。

さて、一方この問題は、H の特殊線型群による商のコンパクト化が複素射影直線になること、従って上記モジュラー曲線が複素射影直線の(分岐)被覆となっていること、に着目すると、対数的 Riemann-Roch の定理によって容易かつ自然にアプローチすることができる。しかも、当該定理には先に述べたように一般 Bernoulli 数が現れるが、これは虚 2 次体の類数と自然に関係するため、上記の Hecke の発見を対数幾何学的観点から自然に説明できる。

このように、対数的 Riemann-Roch の定理は、1 次元という最も単純な場合でさえ、整数論の様々な分野に新たな結びつきを与え、既存の理論や現象にも別方向からの解釈を与えてくれるものであった。

２．研究の目的

以上の背景を踏まえて、
(1) 代数的 K 群の対数的類似である Kummer エタール K 群のより精密な一般論の構築、およびそれを用いて定式化される対数的 Riemann-Roch の定理の一般化・精密化・改良を行うとともに、
(2) その代数幾何・数論幾何への更なる応用について考察する
ことが本研究の目的である。

２．研究の方法

具体的には以下の様な研究を行う。

(1) 対数的 Riemann-Roch の定理は、上に述べたように、現時点では一部のクラスの対数的代数多様体および一部の射にその適用範囲が限られているが、実際の応用上の観点からは、また対数幾何学の思想的にも、対数的スムーズなど、より広いクラスの対数的代数多様体に対して定式化され証明されること

が期待される。
そこで、こういった対数的代数多様体を始めとする、より一般の対数的代数多様体についても、その Kummer エタール K 群の構造を詳しく調べるとともに、これらの間のより一般の射に対する Riemann-Roch　の定理を定式化・証明する。
さらに、前述の通り対数的 Riemann-Roch の定理には一般 Bernoulli 数が現れることが分かっているが、これは p 進的に新しい現象の存在を期待させる。そこで、岩澤理論や表現論などからの p 進解析的知見を参考にしつつ、p 進的性質がより明確になるような当該定理の新しい定式化についても考察する。

(2) 上記“fundamental problem”は Hecke 以降、Hilbert モジュラー多様体や Siegel モジュラー多様体などにも一般化されている。そこで、このような場合を始めとする代数幾何・数論幾何的に重要な代数多様体に対しても、対数的 Riemann-Roch の定理を用いて対数幾何学的立場からの研究および考察を行う。
これらについては、すでに跡公式などを用いた様々な先行研究があるが、モジュラー曲線の場合からも想像できるように、こちらのアプローチも使うことによって、数論的意味がより明確に理解できると期待される。取り分け、先に述べたような p 進的挙動については真に新しい知見を与えてくれると思われる。

４．研究成果

対数的 Riemann-Roch の定理の一般化に関しては、スムーズかつ対数的スムーズな対数的代数多様体の間の、exact とよばれる十分に広いクラスの固有射に対しては、Kummer Chow 群ともいうべき群を導入した上で定式化・証明を行った。

また、一般 Bernoulli 数に関連する不変量の p 進的挙動については、曲線などごく特別な場合にではあるが、対数的 Riemann-Roch の公式を通じて、数論的に興味深いと思われる現象が観察された。そこで、この現象がより明確となるような当該公式の新たな定式化およびその数論的応用についても考察した。

さらに、数論的応用については、Hilbert モジュラー曲面などの数論的に重要な代数多様体を中心に、当該 Riemann-Roch の定理を適用することで、いわゆる Hecke の“fundamental problem”の証明が得られることを確認した。

一方、これら Hilbert モジュラー多様体などにおいては、曲線の場合と異なり、群の作用による商としていくつかのタイプの特異点が現れる。Hilbert モジュラー曲面などの場合においては簡単な特異点解消によって、現時点で得られている対数的 Riemann-Roch の定理が適用可能な状況に帰着できるものの、対数的幾何学の観点からは、そのような帰着なしで直接適用可能なタイプの定理が自然に期待される。
そこで、より一般の対数的 Riemann-Roch の定理の拡張に向けて、スムーズとは限らない対数的スキーム上の Kummer エタール層や K 群などに関する一般論を発展させるとともに、いくつかの例について計算や考察を行った。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

1. 萩原　啓，Kummer エタール K 群とその応用，早稲田大学整数論研究集会 2012 報告集，査読無，2013，136-146

〔学会発表〕（計 6 件）

1. Kei HAGIHARA，Riemann-Roch theorem for logarithmic schemes，Arithmetic and algebraic geometry 2014，January 30，2014，東京大学大学院数理科学研究科(東京都目黒区)

2. 萩原　啓，Riemann-Roch theorem for logarithmic schemes，数論幾何学セミナー，平成 25 年 10 月 10 日，北海道大学(北海道札幌市)

3. 萩原　啓，Kummer エタール K 群とその応用，整数論保型形式セミナー，平成 24 年 11 月 9 日，大阪大学(大阪府豊中市)

4. 萩原　啓，Kummer etale K 群とその応用，早稲田整数論研究集会，平成 24 年 3 月 21 日，早稲田大学(東京都新宿区)

5. 萩原　啓，Kummer etale K 群とその応用，代数幾何とモチーフ理論ワークショップ，平成 24 年 3 月 8 日，東北大学(宮城県仙台市)

6. Kei HAGIHARA，Kummer etale K-theory and its application，Boston-Keio Workshop，September 18，2011，Boston (U.S.A.)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
無

６．研究組織
(1)研究代表者
萩原　啓（HAGIHARA, Kei）
北海道大学・大学院理学研究院数学部門・
博士研究員
研究者番号：30512173

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：