

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年5月31日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2012

課題番号：23740032

研究課題名（和文） 高次元代数多様体上の曲線の変形および障害

研究課題名（英文） Deformations of curves on a higher dimensional algebraic variety and their obstructions

研究代表者

那須 弘和 (NASU HIROKAZU)

東海大学・理学部・講師

研究者番号：30535331

研究成果の概要（和文）：

高次元単線織代数多様体上の退化曲線に対し、曲線の1位無限小変形と障害類に関する研究を行った。特に超曲面の極付き1位無限小変形（法束の有理切断）について考察し、2つの異なる幾何学的解釈を与えた。またリエゾン理論を応用することにより、ある特殊なクラスの空間曲線のヒルベルトスキームの既約成分の分類を行った。さらにピカル数が2の非特異4次曲面に含まれる空間曲線の変形に関する研究を行い、1位無限小変形が2位変形にリフトしないような空間曲線族を構成した。

研究成果の概要（英文）：

We study the first order infinitesimal deformations of degenerate curves on a uniruled algebraic variety of dimension at least 3 and their obstructions. As a result, we give two different geometric interpretations of infinitesimal deformations with poles (rational sections of the normal bundle of hypersurfaces). By using the liaison theory, we give a classification of the irreducible components of the Hilbert scheme for a certain class of space curves. We also study the deformations of space curves lying on a smooth quartic surface of Picard number 2, and construct a new example of families of curves with obstructed first order infinitesimal deformations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ヒルベルトスキーム、変形理論、空間曲線、無限小変形、障害

1. 研究開始当初の背景

固定された射影的代数多様体上の曲線全体の集合には代数多様体(スキーム)の構造が入り、ヒルベルトスキームと呼ばれる。ヒルベルトスキームは、代数幾何学における重要な研究対象であるモジュライと呼ばれるものの一つである。ヒルベルトスキームは考察対象の曲線を幾何学的に良い性質のものだけに制限しても、一般には悪い特異点を持つことが知られている。そのような例を初め

て与えたのは Mumford である。3次元射影空間 P^3 内の非特異連結曲線のヒルベルトスキームの既約成分をひとつ与え、その生成点においてヒルベルトスキームが被約でない (non-reduced) ことを示し、病理(pathology)と位置づけた。Mumford の例は Gruson-Peskine, Kleppe, Ellia, Fløystad 等の研究者達により、空間曲線のヒルベルトスキームの場合に様々な形で一般化され、Vakil によりヒルベルトスキームは「Murphyの法則」すなわち、先天的に他の理由が無い

限りモジュライ空間はいくらでも悪い特異点を持つことが示された。

研究代表者はヒルベルトスキームが悪い特異点を持つのが自然であるならば、その原因を系統立てて明らかにしたいと考えた。学位論文において空間曲線の1位無限小変形が2位変形にリフトする為の障害類を計算し、加算無限個のMumford型非被約既約成分を具体的に構成した。京都大学数理解析研究所の向井茂氏との共同研究において、この計算を精密化し、3次元射影空間から任意の単線織3次元代数多様体に一般化した後に、与えられた1位無限小変形に対する「障害性判定定理」の形式にまとめた。この判定定理を \mathbb{P}^1 -束やdel Pezzo多様体上の曲線に適用することにより、Mumfordの例を広範囲に一般化することに成功した。この一般化により、ヒルベルトスキームの病理の「病巣」とも言うべき非被約性の理由が、代数多様体上のある種の有理曲線（第一種例外曲線）にあることが次第に明らかになってきている。

2. 研究の目的

Mumfordの例(非被約既約成分の例)を高次元代数多様体上の曲線のヒルベルトスキームの場合に一般化すること、もしくは類似の構成をすることにより、特異点や次元など、ヒルベルトスキームの具体的性質に関する研究を行うことが、本研究の目的である。その目的を達成する為の手段として、曲線の高次元多様体上の被障害変形と高次元多様体上のある種の有理曲線(第一種例外曲線など)との間に存在すると予想される関係について研究し、これを明らかにする。

3. 研究の方法

高次元代数多様体上の曲線の変形について、1位無限小変形とその持ち上げ障害を用いた手法(ヒルベルトスキームの無限小解析的手法)により研究を行う。「1. 背景」で述べた向井茂氏との共同研究において得られた「障害性判定定理」の精密化を図り、定理を様々な代数多様体に適用し、上述の被障害変形と有理曲線との間の関係を理解し、ヒルベルトスキームの具体的性質を理解する為に役立てたい。ヒルベルトスキームの具体的性質に関する先行研究の多くは、射影空間のヒルベルトスキームに関するものであり、一般の射影的代数多様体に対するヒルベルトスキームの研究は新しい。これまでの研究の道具は射影空間の特殊状況を用いたもの(例えばリエゾンの理論など)が多かった。1位無限小変形やその障害類の理論は小平やSpencerにより導入され、古くから存在するが、研究代表者自身も含め、具体的な問題に

適用することは難しいと考えていた。研究代表者の考案したカップ積による障害類の計算手法がヒルベルトスキームを研究する上で、新たな道具となることを期待している。

4. 研究成果

(1)3次元以上の様々な単線織代数多様体とその上の退化曲線に対し、1位無限小変形が2位変形にリフトする為の障害類の計算を行った。また、曲線の含まれる超曲面上の可縮因子と、曲線の変形障害との関係について調査した。超曲面の極付き無限小変形(法束の有理切断)について考察し、極付き無限小変形の次の2つの幾何学的な解釈を与えた:

1. 開多様体の無限小変形
2. ブローアップした多様体上の無限小変形

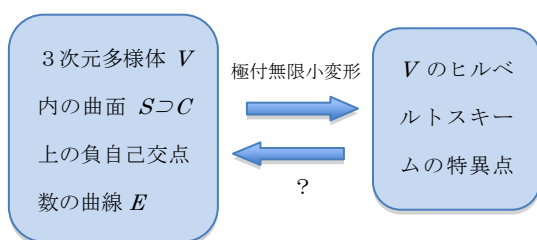
これらの解釈は極付き無限小変形の応用にとって重要であるが、被障害性との関係などまだ理解が不十分な点も多く、研究を継続し本質的理解に努めたい。

(2)リエゾン理論を応用することにより、低次元空間曲線のヒルベルトスキームの既約成分を分類し、既約成分の一般元である曲線を低次元曲面の因子類や定義イデアルの極小自由分解を用いて記述した。特にS. Lamy氏からのメールによる問合せを受け、次数11、種数14の空間曲線のヒルベルトスキームは2つの既約成分からなることを示した(⑤)。近年空間曲線の研究は、BlancとLamyによりSarkisov Linkの構成に用いられる等、応用面でも重要性を増している。今後の研究においては、より一般の次数と種数の空間曲線のヒルベルトスキームに対し、既約成分を分類し、上述のような具体的記述が得られるよう努力したい。

(3)2011年度は、東海大学で開催された可換環論と表現論の研究集会に参加し、上記の空間曲線のヒルベルトスキームの既約成分の分類に関する研究結果を発表した。また3次元単線織代数多様体上の曲線の変形障害に関する一連の研究成果を整理し、広島大学の代数学セミナーと東京大学の代数幾何学セミナーにおいてそれぞれ発表し、本研究課題に関する討論を行った。討論において多数の専門家から研究を進めるにおいて有益なコメントを頂いた。京都大学やハーバード大学で開催された研究集会に参加し、他の参加者達と有益な情報交換を行った。

(4)非特異4次(K3)曲面に含まれる空間曲線の射影空間内における変形障害について研究を開始した。2012年4月にアーカイブに投稿されたKleppeとOttemの論文において、非特異4次曲面に含まれる空間曲線族からな

るヒルベルトスキームの非被約既約成分の例が構成された。この例の発見に刺激を受け、直線や2次曲線を含む非特異4次曲面上の空間曲線に対し、一位無限小変形とその障害類の計算を行い、その非零を示すことに成功した。障害類の計算とその非零を示す過程において、直線や2次曲線が4次曲面上で自己交点数-2を持つことが鍵となった。本研究結果を公表するため、現在論文を執筆中である。さらに、4次曲面上の非障害空間曲線の例を一般化することにより、より一般の設定（例えば直線とそれを含む非特異曲面）において、被障害変形を持つと予想される空間曲線族を構成したが、残念ながら他の技術的な問題により、未だ被障害性を示すには至っていない。本研究結果と現在取り組む課題は、第一種例外曲線だけでなく、曲面上の任意の負の自己交点数の有理曲線から、被障害変形を持つ空間曲線の例が得られる可能性を示唆するものであり、実に興味深い。今後の継続課題として、上述の空間曲線族の被障害性の証明に取り組みたい。



(5)2012 年度はこれまでの研究成果をまとめ、9月にHawaii Tokai International Collegeで開催された国際研究集会に於いて、また翌年3月にはノルウェーのOslo and Akershus University College (HiOA)において開催された代数学セミナーに於いて、空間曲線の変形障害に関する研究発表を行った。ノルウェーでは、1980年代に空間曲線や部分多様体の変形の研究が盛んに行われた経緯があり、セミナーには多数の変形理論を専門とする代数幾何学研究者が参加し、セミナー後も活発な議論が行われた。また1週間の滞在中にHiOAのKleppe教授と集中的に議論を行い、Noether-Lefschetz軌跡に関するある写像の全射性の証明を学ぶことができたのは大変有意義であった。国内では、東京大、東京理科大、佐賀大、関西学院大、京都大において開催された研究集会や学会等に積極的に参加し、関連する研究テーマに触れ、他の参加者と議論を行った。

(6)今後の研究においては、1位無限小変形に対する障害性判定定理の更なる精密化を図りたい。その為にも曲面上の負自己交点数

を持つ有理曲線を用いて、1位無限小変形の障害類を計算し、その非零を示すことを目標とする。曲線の変形を第1種例外曲線やそれに類する有理曲線によって制御できるようになれば、空間曲線、より一般に代数多様体上の曲線のヒルベルトスキームの研究が進展することが期待される。今後もこの研究を継続して行い、曲線の変形障害やヒルベルトスキームの非被約既約成分に関する理解を深めたい。

5. 主な発表論文等

[学会発表] (計8件)

- ① Hirokazu Nasu, *Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme*, Algebra-Seminaret i Oslofjord-Regionen, 2013年3月5日, Oslo and Akershus University College (ノルウェー)
- ② 那須弘和, *Obstructions to deforming space curves and non-reduced components of the Hilbert scheme*, Workshop in Hawaii: Aspects of SLP and WLP, 2012年09月14日, Hawaii Tokai International College (米国)
- ③ 那須弘和, *3次元単線織多様体上の曲線の変形障害について*, 第10回アフィン代数幾何学研究集会, 2012年9月6日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス
- ④ 那須弘和, *3次元単線織多様体上の曲線の変形障害について*, 東京理科大学談話会, 2012年7月20日, 東京理科大学理工学部数学科
- ⑤ 那須弘和, *空間曲線のリエゾンとヒルベルトスキームの既約成分*, 研究集会「可換環論と鏡映群の表現論」, 2012

年3月8日, 東海大学理学部

- ⑥ 那須弘和, *3次元単線織多様体上の曲線の変形障害について*, 代数学セミナー, 2012年2月3日, 広島大学理学部数学科
- ⑦ 那須弘和, *Obstructions to deforming curves on a uniruled 3-fold*, 代数幾何学セミナー, 2011年12月5日, 東京大学数理科学研究科
- ⑧ 那須弘和, *Obstructions to deforming degenerate curves on a scroll*, 日本数学会秋季総合分科会, 2011年9月30日, 信州大学理学部

[その他]

ホームページ等

<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

那須 弘和 (NASU HIROKAZU)

東海大学・理学部・講師

研究者番号: 30535331