

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 17 日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740033

研究課題名(和文) 高次元ディオファントス近似であるポエタ予想の、ブローアップ及び力学系設定での解決

研究課題名(英文) Vojta's Conjecture on blowups and in Arithmetic Dynamics

研究代表者

安福 悠 (YASUFUKU, Yu)

日本大学・理工学部・准教授

研究者番号：00585044

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：ディオファントス幾何とは多変数多項式の整数解や有理数解について研究する分野で、ポエタ予想はその中で最重要予想の一つである。本研究では、ポエタ予想を射影空間のブローアップ上で新たに証明することに成功した。また、一つの写像を固定し、その多重合成により一つの点がどのように動かされていくか記録したものを軌道と言うが、軌道上の整数点が少ないこと、及び軌道と部分多様体の共通部分には、アーベル多様体の時と異なり規則性が皆無であることを証明した。

研究成果の概要(英文)：Diophantine geometry is a study on integral and rational solutions to multivariable polynomials, and Vojta's conjecture is one of the most important conjectures in this field. During the span of this grant, I have succeeded in proving some cases of Vojta's conjecture on the blowups of the projective space. I have also analyzed arithmetic properties of orbits, that is, how a point is moved by the iterates of a fixed map. In particular, I have obtained some conditions under which integral points in orbits are sparse, and I have proved that the intersection of orbits and subvarieties do not have any group-like structure as one would expect from the theory of abelian varieties.

研究分野：代数学(ディオファントス幾何)

キーワード：ポエタ予想 数論的力学系 整数点 最大公約数 モデル・ラング予想

1. 研究開始当初の背景

代数的整数論とは、整数や素数について研究する分野であり、そのなかで、ディオファントス幾何とは、多変数多項式の整数解や有理数解について、幾何学的及び代数的に分析する分野である。ディオファントス幾何における最重要な課題のひとつとして本研究題目にあるポエタ予想がある。この予想は、多変数多項式の解の空間を複素数上で考えたときの幾何学的性質が、整数解や有理数解の性質を導き出すと主張する。最近京都大学の望月新一氏により証明が発表された、整数論の最重要予想の一つである abc 予想も特殊ケースとして含む、大変深遠な予想である。ある特殊な場合を除いては、この予想は研究開始当初解決されていなかった。

力学系とは、ある空間の自己写像を固定した時に、その多重合成の漸近的性質を調べる分野である。特に、多重合成により一つの点がどのように動かされていくかを記録したものである軌道が、重要な研究対象である。数論的力学系とは、力学系における数論的性質を研究するもので、大変新しい分野である。研究開始当初、研究が盛んになり出した分野と言える。

2. 研究の目的

ポエタ予想及び数論的力学系の研究をするにあたり、具体例での解決にまず照準を定めることで、一般理論の構築を目指すのが目的である。ポエタ予想に関しては、射影空間と幾何学的には近い（より正確には双有理）空間である、射影空間のブローアップ上で考察し、解決を試みるのが当初の研究目的である。既に、Corvaja-Zannier (2005) により、射影平面を一度ブローアップしたところでは、最大公約数の不等式に還元することで、部分解決していたので、この場合の完全解決、及び射影平面の多重ブローアップ上での解決が具体的な目標である。また、射影平面という2次元だけではなく、一般次元の射影空間のブローアップ上での研究を行う。

数論的力学系に関しては、軌道上の整数点の多さについて、まずは射影平面上の射について考察するのが研究当初の目的である。この問題は1次元上では Silverman (1993) によりすでに解決しているので、これを2次元以上に拡張することとなる。続いて、射だけではなく、定義されないような点を一部もつような有理写像についても、具体例を通して分析する。この場合高さ関数の挙動を制御するのが難しくなるので、射の場合と比較し予想をたてることすら難解である。射影平面の場合だけでなく、さらに一般の次元の射影空間上で、射や有理写像による軌道上における整数点を研究する。

<引用文献>

① Pietro Corvaja and Umberto Zannier, *A lower bound for the height of a rational function at S -unit points*, *Monatsh. Math.* **144**

(2005), no. 3, 203–224.

② Joseph H. Silverman, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 3, 793–829.

3. 研究の方法

本研究は主に個人研究であるが、数学の研究の進展には、専門家との研究討議を通して様々なアイデア、考え方、手法などの知見を得ることがかかせない。そこで、アラケロフ幾何・力学系・代数幾何・論理学の第一人者を招聘したり、彼らの大学に行ったり、共通の学会に参加したりすることで、研究期間を通して研究討議を行った。その結果、共著論文になった研究も含め、ポエタ予想や数論的力学系の分野の発展に貢献することができた。

4. 研究成果

以下、下記5. の〔雑誌論文〕の番号に基づき、論文ごとに解説する。

① は、下記5. の〔学会発表〕⑳の研究集会時の共同研究に基づいている。1次元の力学系において、軌道における整数点は、分岐に関して特殊な性質を満たさない限り有限個なのだが、この個数は射によって異なり、個数の上界もない。そこで、より強い条件である、軌道における単数点に着目し、この場合個数が射によって異ならないことを示した。

②, ③, ④, ⑨ は高次元における軌道の整数点についての研究成果である。「2. 研究の目的」にも記載した通り、1次元上では Silverman の結果が知られているが、2次元以上においては何も知られておらず、⑨ が初めての結果である。②, ③, ④ ではさらに改良を重ね、軌道の整数点があまらんと保証できる幾何学的条件を弱めることに成功した。これらの条件は軌道の整数点があまらんとするための必要条件に近づいている。また、③ では D -ratio という概念を用いて、④ では数論的度数という概念を用いることで、不定点を持つような有理写像に関しても、軌道の整数点があまらんと十分条件を見出すことができた。

⑤ は論理学のモデル理論を研究されている Scanlon 氏との共同研究である。一般に、一つ写像を固定することで、その多重合成だけをみる限りは、アーベル多様体と呼ばれる、空間全体に群構造を持つものの類似の結果が成り立つと考えられている。ところが、Mordell–Lang 予想というアーベル多様体上で既に証明されている結果の力学系類似版が、全く成立しないことを証明したのがこの論文である。より具体的には、軌道と部分多様体の共通部分は、基本的にどんな集合にもなってしまうことを示し、アーベル多様体の時のように群構造のようなものが入ら

ないことを証明した。この結果，数論的力学系の諸問題が決定不可能である，という Gödel の結果の力学系版も導いた。

⑥ と ⑧ は，射影空間のブローアップ上のポエタ予想についての新しい結果である。⑥ では射影平面の多重ブローアップを，また，⑧ ではより特殊な配置に限定して射影空間の多重ブローアップを扱い，それぞれにおいてポエタ予想を証明した。その結果として，最大公約数に関する新しい不等式を示すことができた。⑧ では，射影平面の 2 重ブローアップ上のポエタ予想と abc 予想との意外な関連性についても言及した。

⑦ は Gregor 氏との共同研究で， $(x, y) \mapsto (x^i y^j, x^k y^l)$ の形で書ける， \mathbb{P}^2 上の単項式写像と呼ばれるものに限定して，軌道の整数点が多数あるか否かを完全分類した。単項式写像は不定点をもつ有理写像なので，射の場合と違い，一般には高さ関数による分析が難しい。しかしこの場合は，線形代数の結果を利用することで，行列 $\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ の条件で，軌道の整数点が多数ある必要十分条件を見つけた。まだこの時点では，有理写像による軌道の整数点問題が全く研究されていないかったため，この結果は ③ や ④ における理論構築に大変役立った。

⑩ は Manes 氏との共同研究で，1 次元における有理数係数 2 次有理写像を， \mathbb{Q} 係数 1 次分数変換で共役した時の，共役類の代表元を非常に明示的に書き表した。周期点 (ある m 重合成により固定される点のこと) のなかで \mathbb{Q} 上定義できるものの性質を調べるときには，有理数係数の座標変換だけを考慮して共役類を作る必要がある。このため，複素数係数の座標変換も考慮してしまう複素力学系用のモジュライ空間では不十分で，この論文の記述が有意義である。この論文で得られた共役類の代表元はコンピューター計算に適しており，「 \mathbb{Q} 上の周期点の数は一様有限である」という Morton-Silverman 予想などの，数論的力学系の予想を調べるのに適している。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Holly Krieger, Aaron Levin, Zachary Scherr, Thomas J. Tucker, Yu Yasufuku, and Michael Zieve, *Uniform boundedness of S -units in arithmetic dynamics*, Pacific J. Math. **274** (2015), no. 1, 97–106. 査読あり. DOI: 10.2140/pjm.2015.274.97
- ② 安福 悠, 高次元における軌道の数論的性質について, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 掲載受理. 査読あり.
- ③ Yu Yasufuku, *Integral Points and*

Relative Sizes of Coordinates of Orbits in \mathbb{P}^N , Math. Z. **279** (2015), no. 3–4, 1121–1141. 査読あり. DOI: 10.1007/s00209-015-1406-y

- ④ Yu Yasufuku, *Deviation from S -Integrality in Orbits on \mathbb{P}^n* , Bull. Inst. Math., Acad. Sin. **9** (2014), no. 4, 603–631. 査読あり. http://w3.math.sinica.edu.tw/bulletin_ns/20144/2014403.pdf
 - ⑤ Thomas Scanlon and Yu Yasufuku, *Exponential-Polynomial Equations and Dynamical Return Sets*, Int. Math. Res. Not. **2014** (2014), no. 16, 4357–4367. 査読あり. DOI: 10.1093/imrn/rnt081
 - ⑥ Yu Yasufuku, *Integral Points and Vojta's Conjecture on Rational Surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 2, 767–784. 査読あり. DOI: 10.1090/S0002-9947-2011-05320-1
 - ⑦ Aryeh Gregor and Yu Yasufuku, *Monomial Maps on \mathbb{P}^2 and their Arithmetic Dynamics*, J. Number Theory **131** (2011), no. 12, 2409–2425. 査読あり. DOI: 10.1016/j.jnt.2011.06.012
 - ⑧ Yu Yasufuku, *Vojta's Conjecture on Blowups of \mathbb{P}^n , Greatest Common Divisors, and the abc Conjecture*, Monatsh. Math. **163** (2011), no. 2, 237–247. 査読あり. DOI: 10.1007/s00605-010-0242-8
 - ⑨ Yu Yasufuku, *Vojta's conjecture and Dynamics*, 京都大学数理解析研究所講究録別冊 **B25** (2011), 75–86. 査読あり. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B25/pdf/B25-04.pdf>
 - ⑩ Michelle Manes and Yu Yasufuku, *Explicit Representations over a field K of Quadratic Maps on \mathbb{P}^1* , Acta Arith. **148** (2011), no. 3, 257–267. 査読あり. DOI: 10.4064/aa148-3-3
- [学会発表] (計 25 件)
- ① Yu Yasufuku, *Structure theorems for affine surfaces and Campana conjecture*, 「アフィン代数幾何学研究集会」, 関西学院大学 (大阪府大阪市), 2015 年 3 月 7 日.
 - ② Yu Yasufuku, *Logarithmic Kodaira dimension and Diophantine equations*, 「ディオファントス近似とその周辺」, 群馬大学 (群馬県桐生市), 2015 年 3 月 6 日.

- ③ [Yu Yasufuku](#), 軌道上の単数の一様有界性, 「解析的整数論 - 数論的対象の分布と近似」, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2014 年 10 月 31 日.
- ④ [Yu Yasufuku](#), *Schmidt* の部分空間定理の証明について, 八王子数論セミナー, 八王子セミナーハウス (東京都八王子市), 2014 年 9 月 5 日.
- ⑤ [Yu Yasufuku](#), 有理曲面上の *Vojta* 予想と *abc* 予想の相互関係, 神戸大学代数セミナー, 神戸大学 (兵庫県神戸市), 2014 年 6 月 5 日.
- ⑥ [Yu Yasufuku](#), *Vojta's Conjecture and Integral Points in Orbits*, 「Autour des conjectures de Lang et Vojta」, ルミネー研究所 (フランス マルセイユ), 2014 年 3 月 4 日.
- ⑦ [Yu Yasufuku](#), ボエタ予想と, その力学系への応用 I – IV, 北大数論幾何学セミナー, 北海道大学 (北海道札幌市), 2014 年 2 月 5, 6 日.
- ⑧ [Yu Yasufuku](#), *Vojta's Conjecture on Some Rational Surfaces*, 「International Workshop on Diophantine Problems and Arithmetic Dynamics」, ソウル大学 (韓国 ソウル), 2014 年 1 月 4 日.
- ⑨ [Yu Yasufuku](#), 軌道の座標の数論的性質 一具体例を通して, 「代数的整数論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2013 年 12 月 12 日.
- ⑩ [Yu Yasufuku](#), 軌道の点の座標表示の桁数, 筑波大学代数特別セミナー, 筑波大学 (茨城県つくば市), 2013 年 7 月 25 日.
- ⑪ [Yu Yasufuku](#), *Some Examples of Integral Points in Orbits for Maps on \mathbb{P}^N* , 「Conference on Diophantine Problems and Arithmetic Dynamics」, 中央研究院 (台湾 台北), 2013 年 6 月 24 日.
- ⑫ [Yu Yasufuku](#), *The Failure of Dynamical Mordell-Lang Conjecture*, ウディネ大学数論セミナー, ウディネ大学 (イタリア ウディネ), 2013 年 3 月 14 日.
- ⑬ [Yu Yasufuku](#), *Exponential Diophantine Equations and Dynamical Mordell-Lang*, 「Diophantine Analysis and Related Fields」, 日本大学理工学部 (東京都千代田区), 2013 年 1 月 9 日.
- ⑭ [Yu Yasufuku](#), *Integral Points and Zsigmondy Sets of Orbits*, 「複素力学系の新展開」, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2012 年 12 月 14 日.
- ⑮ [Yu Yasufuku](#), *Various Versions of Vojta's Conjecture*, 「複素力学系の新展開」, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2012 年 12 月 13 日.
- ⑯ [Yu Yasufuku](#), *Vojta's Conjecture on Surfaces*, 第 55 回函数論シンポジウム, 金沢大学 (石川県金沢市), 2012 年 11 月 24 日.
- ⑰ [Yu Yasufuku](#), 力学系モデル・ラング問題について, 京都大学数論合同セミナー, 京都大学 (京都府京都市), 2012 年 10 月 12 日.
- ⑱ [Yu Yasufuku](#), *Coordinates of Forward Orbits in Projective Space*, 「Algebraic Dynamics Workshop」, カリフォルニア大学バークレー校 (アメリカ バークレー), 2012 年 5 月 12 日.
- ⑲ [Yu Yasufuku](#), *Relative Sizes of Coordinates of Orbits Points under a Morphism on \mathbb{P}^n* , New York Collaborative Number Theory Seminar, ニューヨーク市立大学大学院センター (アメリカ ニューヨーク), 2012 年 3 月 16 日.
- ⑳ [Yu Yasufuku](#), *Introduction to Height Functions*, 「Global Arithmetic Dynamics Workshop」, Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics, ブラウン大学 (アメリカ プロビデンス), 2012 年 3 月 15 日.
- ㉑ [Yu Yasufuku](#), *Finiteness of Integers in Orbits in Higher-Dimensions*, 「Hawaii Conference in Algebraic Number Theory, Arithmetic Geometry, and Modular Forms」, ハワイ大学 (アメリカ ハワイ), 2012 年 3 月 8 日.
- ㉒ [Yu Yasufuku](#), *Integral Points and Forward Orbits on \mathbb{P}^n* , Arithmetic Geometry Session, アメリカ数学会西海岸分科会, ハワイ大学 (アメリカ ハワイ), 2012 年 3 月 3 日.
- ㉓ [Yu Yasufuku](#), 軌道の点の座標の大きさについて, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学 (東京都新宿区), 2012 年 1 月 27 日.
- ㉔ [Yu Yasufuku](#), *Finiteness of integers in orbits of maps on \mathbb{P}^n* , 「Diophantine Analysis and Related Fields」, 新潟大学 (新潟県新潟市), 2012 年 1 月 9 日.
- ㉕ [Yu Yasufuku](#), 高次元ディオファントス近似と力学系, 明治学院数論セミナー, 明治学院大学 (東京都港区), 2011 年 6 月 4 日.

[その他]
ホームページ等

[http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/
~yasufuku/](http://www.math.cst.nihon-u.ac.jp/~yasufuku/)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安福 悠 (YASUFUKU, Yu)

日本大学 ・ 理工学部 ・ 准教授

研究者番号： 00585044