様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　6 月　8 日現在

機関番号：３５３０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2015
課題番号：２３７４００３７

研究課題名（和文）代数曲面上の安定層のモジュライスキームの双有理幾何的性質の研究

研究課題名（英文）Birational-geometric property of moduli of stable sheaves on surfaces

研究代表者

山田　紀美子（Yamada, Kimiko）

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：７０３８４１７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：複素数体上の射影的曲面Xと、X上の豊富直線束Hを与えると、X上のH-安定なベクトル束で、固定されたチャーン類を持つもののモジュライ空間M(H)が存在する。M(H)は高次元代数多様体の具体例となる。この研究では、ベクトル束のモジュライM(H)において、双有理幾何学に出てくる諸理論や手法を、モジュライ空間であるという具体性に沿うように構成・解釈することを目指した。その結果、(1)Xがエンリケス曲面の時、(2)Xが小平次元1の楕円曲面で、特異ファイバー・重複ファイバーがかなり少ない時に、M(H)の双有理的性質、例えば小平次元を求めた。

研究成果の概要（英文）：Let X be a complex projective surface, and H be an ample line bundle on X. There is a moduli scheme M(H) of H-stable vector bundles on X with fixed Chern classes. M(H) is a specific example of higher-dimensional algebraic variety. In birational geometry, there are several methods and theories to study higher-dimensional varieties V. In this research, we aimed at constructing and interpreting them by moduli-theoretic way in case where V is M(H). Consequently, we calculated the Kodaira dimension of M(H) when (1) X is an Enriques surface or (2) X is an elliptic surface with Kodaira dimension 1 and X has a few singular fibers.

研究分野：複素代数幾何学

キーワード：モジュライ　ベクトル束　小平次元　特異点　楕円曲面　エンリケス曲面　双有理幾何学　安定層

１．研究開始当初の背景

X を非特異な複素射影曲面、H を X 上の豊富な直線束とする。すると X 上の連接層 E の H-安定性を定義できる。整数 c_2 に対し、階数 2、第 1 チャーン類 c_1、第 2 チャーン類が c_2 である X 上の H-安定な連接層のモジュライスキーム M(cc)が存在する。(c_1,c_2)の対をここでは便宜的に cc と書くことにする。H 半安定な連接層の S 同値類のモジュライスキーム¥bar{M}(cc)は複素射影的であり、M(cc)を自然に開集合として含む。

M(cc)は複素準射影的であり、次元は exp. dim M(cc)=4c_2-c_1^2-3¥chi(O_X)以上であり、exp.dim M(cc)が十分大きければ M(cc)は空集合ではないことが知られている。このため、exp.dim が十分大きい時 M(cc)は高次元代数多様体の具体例と見ることができる。そこで高次元多様体 M(cc)の性質を理解したい、という自然な問題が浮上する。高次元多様体 V の重要な双有理不変量に、V の小平次元がある。

X が最小曲面で小平次元が正の時、M=M(cc)の小平次元に関する主な先行研究は次の通りである。

(1) X は一般型で p_g(X)は 0 でなく、M の次元は偶数で十分大きいとする。すると M は一般型。(J. Li, 1994)

(2) X は小平次元 1、特に楕円曲面とする。c_1 のファイバー次数が奇数ならば、M はコンパクト非特異であり、M は X のヒルベルトスキーム Hilb^{d/2}(X)に双有理同値になる。特に M の小平次元は dim(M)/2 である。(Friedman, 1995)

X が一般型の場合だが、(1)は p_g(X)が 0 でないことをフルに使っており、p_g(X)=0 の時に M の小平次元がどうなるかは今の所不明である。

X の小平次元が 1 の場合だが、(2)においては「c_1 のファイバー次数が奇数ならば、M の点に対応する連接層 E の X の生成ファイバー（楕円曲線）への制限が安定。更に、その安定ベクトル束は同型を除いてただ一つに決まる」という特殊事情がかなり効いている。その結果(2)は、c_1 のファイバー次数が奇数でない、例えば c_1=0 の時には成り立たない。

すなわち、(1)(2)は非常に重要な仕事であるが、X の小平次元が正の時に M の小平次元については分からないケースがまだまだ多いと言わざるを得ない状況である。

２．研究の目的

双有理幾何学は、高次元多様体を調べる際に大事な理論である。報告者は次のように仮説を立てた。

仮説：安定層のモジュライに対する双有理幾何学の理論は、モジュライ理論を使って翻訳・記述できるのではないか。そして、そのようなモジュライ理論的記述を使えば、安定層のモジュライの双有理的性質を研究しやすくなるのではないか。

仮説を念頭に置き、研究の目的を説明する。X は極小曲面であり、標準類 K_X はネフとする。すると X の小平次元は正となり、K_X は X の豊富錐の閉包に含まれる。K_X がゼロでない場合、更に次の条件も付ける：cc=(c_1,c_2)を固定した時、豊富直線束 H が K_X に十分近い、つまり H と K_X をへだてる cc-壁が存在しないものとする。すると M=M(cc)は正規で、その標準類はネフになる。ここでは簡単のため、M は射影的（特にコンパクト）としよう。

問題(1)：M の特異点は、標準的特異点（or 端末的特異点）か。

問題(2)： 特異点が標準的であるための十分条件で、層のモジュライ理論と相性の良いものを見つけよ。

問題(3)： M の「素朴な意味での小平次元」κ(K, M)を求めよ。

ここで、正規完備多様体 V の「素朴な意味での小平次元」は次のように定義する。自然数 m に対し、有理写像 Φ_|mK_V|: V ---> P^{N(m)}が考えられる。m が自然数全体を走ったときの, dim(Φ_|mK_V|)の最大値をκ(K, V)と表す。V が標準的でない特異点を持つ時、κ(K, V)と V の小平次元は一般に異なる。V の全ての特異点が標準的なら、κ(K, V)と V の小平次元は一致する。だから問題(1)の答えが肯定的であれば、問題(3)が分かればただちに M の小平次元も分かる。問題(2)は、問題(1)を解くために設定した。

また、M の小平次元が正の場合、小平次元のみならずその飯高プログラムも理解したい、と考えると次のような問題が生じる。

問題(4)：M の標準類はネフだが、M はアバンダンスを満たすか。つまり、標準類 K_M に対し、|n_0K_M|が自由(base-point free)になるようなある自然数 n_0 があるか。

問題(5)： 問題(4)が肯定的だったとする。このとき M の飯高ファイブレーションΦ=Φ_|mK_M|：M → M_{can}を理解せよ。例えば、モジュライ理論に沿った解釈を見つけよ。

ここで飯高ファイブレーションの定義を説明する。アバンダンスを満たす完備多様体 V に対し、ある自然数 m があって、射Φ=Φ_|mK_V|: V → V_{can} ⊂ P^N は次を満たす：Φは全射でファイバーは連結である。κ(V)=dim(ImΦ)=dim(V_{can}). Φの一般ファイバーは正規多様体で、lK=0 となる自然数 l が存在する。

３．研究の方法

⑵ 研究の目的, の項で次のような問題が出てきた：問題⑴ M の特異点は、標準的特異点（or 端末的特異点）か。この種の問題を考えるには、層の変形理論が重要である。

事実(倉西、Laudal)：E は非特異複素射影曲面上の安定層とする。$\dim \mathrm{Ext}^1(E,E)=d+b$, $\dim \mathrm{Ext}^2(E,E)^0=b$ と $\mathrm{Hom}(E,E(K_X))^0$ の基底を $f_1, \ldots, f_b$ とする。ここで $\mathrm{Ext}^i(E,E(D))^0$ とは、$tr: \mathrm{Ext}^i(E,E(D)) \to H^i(O(D))$ の Kernel のことである。

M の E での完備化環は、$C[[t_1, \ldots,t_{d+b}]]/(F_1, \ldots, F_b)$ に同型である。ここで $C[[t_*]]$ は形式的べき級数環、F_i は 2 次の項からはじまるべき級数で、2 次の項は、写像 $F_{f_i}: \mathrm{Ext}^1(E,E)\times \mathrm{Ext}^1(E,E) \to \mathrm{Ext}^2(E,E(K_X)) \to C$ $(F_{f_i}(\alpha, \beta)=tr(f_i\alpha\beta+f_i\beta\alpha)=tr(H^1(f_i-)(\alpha)\beta)$ で定義）の双対射が与える $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Ext}^1(E,E)^{\vee})$ の元である。ただし、$\mathrm{Hom}(E,E(K_X))^0$ の元 f に対し $H^1(f_-): \mathrm{Ext}^1(E,E) \times \mathrm{Ext}^1(E,E(K_X)) \to \mathrm{Ext}^1(E,E(K_X))$ は $H^1(f_-)(\alpha)=f\alpha-\alpha f$ で定義された写像である。

この事実より、特異点の定義イデアルの 2 次の項は、ホモロジー代数だけを使って定義できる線型写像 $H^1(f_-)$ に深く関係していることが分かる。

以上の結果は層のモジュライ理論（変形理論）であるが、これと特異点論を組み合わせることで、⑵ 研究の目的で出てきた問題⑵ にアプローチできないかと考えた。以上が、申請者が考えて実行した、層のモジュライ M の特異点を研究する方法の一つである。

４．研究成果

<u>(1) X がエンリケス曲面、超楕円曲面、K3 曲面、アーベル曲面の場合</u>

X は極小曲面で小平次元 0 とする。つまり、X はエンリケス曲面、超楕円曲面、K3 曲面、アーベル曲面とする。ある被覆 $\pi : Y \to X$ があって、Y は非特異射影曲面で $K_Y=0$ となる。被覆の次数を d とする。X がエンリケス曲面の場合は d=2 である。

定理 1.1： 正の整数 r, X 上の因子 c_1, 整数 c_2 の組 (r,c_1,c_2) を固定する。もし $2rc_2-(r-1)c_1^2-r^2\chi(O_X) >3d-1$ ならば、チャーン類が (r,c_1,c_2) である H-安定層のモジュライ $M(r,c_1,c_2)$ は正規で、1-Gorenstein で、標準特異点しか持たない。

系 1.2：定理の条件に加え、$M(r,c_1,c_2)$ はコンパクトとする。例えば、r, $c_1 \cdot H$, $c_1^2/2-c_2$ の最大公約数は 1 とする。すると $M(r,c_1,c_2)$ の小平次元は 0.

また d>1 の時、$M(r,c_1,c_2)$ の特異点は、$\pi_*(F)$ として実現できることも示した。ここで F は Y 上の安定連接層で、X 上の層に降下しないものである。例えば Y のゼロ次元部分多様体 Z が一般的(generic)である時の I_Z が挙げられる。

(1)の結果は、Singularities and Kodaira dimension of moduli scheme of stable sheaves on Enriques surfaces, Kyoto J. Math, 2013. として出版された。

<u>(2) X が小平次元 1 の楕円曲面の場合</u>

設定 2.1：X は非特異極小な射影曲面で、小平次元は 1、不正則数 q(X)は 0 とする。従って楕円ファイブレーション $\pi:X \to P^1$ が存在する。π の特異ファイバーは、有理曲線で 1 個の通常二重点を持つもの(I_1)か、重複ファイバーでその reduction は滑らかなもの(mI_0)のどちらかとする。$d=\chi(O_X)$ と置く。（$d\geqq 0$ であることが知られている。）重複ファイバーの数を $\Lambda(X)$ とする。ここでは整数 c_2 に対し、階数 2、第 1 チャーン類 0、第 2 チャーン類が c_2 である X 上の H-安定な連接層の粗モジュライ空間 $M=M(c_2)$ を考える。豊富直線束 H は c_2-suitable, つまり H と K_X を隔てる $(2,0,c_2)$-壁が存在しないとする。

P^1 の生成点を η とすると、$X \to P^1$ の生成ファイバー X_η が存在する。X 上の層 E があれば、X_η 上の層 E_η が誘導される。

定理 2.2: M の点 E は条件「E_η は、階数 1 の X_η-部分加群を持たない」を満たすものとする。そして、
(i) $d>(7/4)\Lambda(x)-1$, 又は (ii) $3>\Lambda(x)$ のどちらかが成り立つものとする。すると、M は E で正規、局所完全交叉であり、E は高々標準特異点である。

$c_2>2p_g+\max(1,(2/3)\Lambda(X))$ ならば、条件「E_η は、階数 1 の X_η-部分加群を持たない」を満たす層 E たちは、$M(c_2)$ の中の稠密集合をなすことが知られている。つまり、定理 2.1 の一番目の条件は比較的弱い条件と言える。2 番目の条件は、重複ファイバーの数があまり多くない、と言う意味である。従って、定理 2.2 の主張を大雑把に言うと、次のようになる：

「E_η は、階数 1 の X_η-部分加群を持たない」を満たす層 E たちのなす $M(c_2)$ の部分集合 M'を考える。$c_2>>0$ ならば、M'は M の稠密部分集合である。X の重複ファイバーの数があまり多くなければ、M'の上にある特異点

は、全て標準特異点である。

定理 2.3: 設定 2.1 に加え、X の重複ファイバーは 2 個で、重複度はそれぞれ $m_1=2$, $m_2=m$ ($m>2$) とし、$d=\chi(O_X)=1$ とする（この時 $p_g(X)=0$ である）。すると次が成立つ。
(i) $M(c_2)$の特異点 E は、必ず条件「E_ηは、階数 1 の X_η-部分加群を持たない」を満たす。
(ii) c_2 が十分大きく、$M(c_2)$はコンパクト（例えば c_2 は奇数）とする。すると、$M(c_2)$の小平次元は$(\dim(M(c_2)+1)/2$ である。

定理 2.3 の 1 番目の設定を満たす射影曲面 X が存在することに注意する。定理 2.3 の主張を大雑把に言うと、次のようになる：X の重複ファイバー、特異ファイバーともにかなり少ないものとする。すると $M(c_2)$にある特異点は、全て標準特異点である。$M(c_2)$コンパクトで c_2 が十分大きければ、$M(c_2)$の小平次元は、次元の約半分である。

定理 2.2，定理 2.3 の証明の流れを説明する。
① $M(c_2)$を開集合として含む射影スキーム $\bar{M}(c_2)$は c_2 が十分大きければ正規で局所完全交叉であり、アバンダンスも満たす。この時$\bar{M}(c_2)$の「素朴な意味での小平次元」$\kappa(K,\bar{M}(c_2))$ ((2)研究の目的、の項参照）を計算する。この項については後で詳述する。
② 局所完全交叉である特異点が標準特異点であるための、次のような十分条件を証明する。これ自体は純粋に特異点論に関する結果で、モジュライ理論とは関係ない。

定理 2.4: (R,p)は、複素数体上滑らかな局所環とし、m_p は p に対応する極大イデアルとし、$(m_p)^2$ の元 $f_1, \ldots, f_k$ が生成するイデアルを I とする。$(m_p)^2$ の元 g が誘導する，$(m_p/m_p^2)^{\vee}$上の 2 次形式を B_g で表す。0 ではない、$f_1, \ldots, f_k$ の任意の C-線型結合 g が $\mathrm{rank}(B_g)>2k$ を満たすならば、局所環$(R/I,p)$は完全交叉、正規で、p は標準特異点である。

③（3）研究の方法の項で紹介した層の変形理論と、②の十分条件を組み合わせると、層のモジュライの特異点に関する次の結果を得る。

系 2.5: E は非特異射影曲面上の安定層とする（階数は任意）。任意のゼロでなく、トレースが 0 である準同型 $f: E \to E(K_X)$ に対し、線形写像
$H^1(f_-): \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(E,E(K_X))$
$(\alpha \to f\alpha-\alpha f)$
のランクが、$2\dim(\mathrm{Ext}^2(E,E))-2p_g(X)+1$ 以上であるとする。すると、安定層のモジュライスキームは、E で局所完全交叉、正規であり、E はたかだか標準特異点である。

④ 定理 2.2 は系 2.5 を用いて示す。ホモロジー代数、特に Ext のヘビーな計算を行う。定理 2.3(i)は、連接層や楕円曲面の一般論を用いて加群論的な考察をすることで証明する。定理 2.3(ii) は ① で行った $\kappa(K,\bar{M}(c_2))$の計算、定理 2.2，定理 2.3(i)を組み合わせて得る。

⑤ 定理 2.3 の状況下で、層のモジュライ M の特異点の実例があることを証明した。また、c_2 が十分大きければ$\bar{M}(c_2)$が既約であることも示した。

次に、（2）研究の目的の項で紹介した問題(1)--(5)について言及する。
問題(1)は定理 2.2，定理 2.3，系 2.5 で考察した。問題(2)は系 2.5 で考察した。問題(3)(4)は①で考察した。問題(5)について説明する。

Friedman (1989)は、有理写像 $\psi:M(c_2) \dashrightarrow P^N$ をモジュライ理論的に作った。作り方を手短に説明する：H が c_2-suitable なので、$M(c_2)$上の点 E と $X \to P^1$ の一般ファイバー$f=\pi^{-1}(p)$に対し、
f への制限 $E|f$ は半安定である。するとある $\mathrm{Pic}^0(f)$の元λがあって、$E|f=\lambda \oplus \lambda^{-1}$，または $E|f$ はλのλ^{-1}による非自明拡大となる。p に対し$\{\lambda, \lambda^{-1}\}$を対応させることで、$J(X)\to P^1$ の二重切断(bisection)が得られ、$J(X)/\pm 1=F_{2k}$（ヒルツェブルフ曲面）の切断 A を誘導する。E に対し A を対応させることで、$\psi:M(c_2) \dashrightarrow |A|=P^N$ を得る。
一方、$\bar{M}(c_2)$はアバンダンスを満たすので、飯高ファイブレーション $\Phi:\bar{M}(c_2) \to \bar{M}(c_2)_{can}$ も得られる。

定理 2.6: c_2 は十分大きいとする。ψのスタイン分解により得られる、ファイバーが連結である有理写像を $\psi': M(c_2) \dashrightarrow V$ とする。するとある射 $j: V \to \bar{M}(c_2)_{can}$があって次を満たす：
(i) $j\circ \psi'= \Phi$. (ii) j の正規化射 $n(j): V=n(V) \to n(\bar{M}(c_2)_{can})$ は開埋め込みである。

定理 2.6 の主張と得られる結果を大雑把に言うと次のようになる：
純モジュライ理論的に作られた Friedman の有理写像ψと、モジュライスキーム $\bar{M}(c_2)_{can}$の飯高ファイブレーションΦの差は、正規化射が開埋め込みとなるような射 j で得られる。
その結果、素朴な意味での小平次元$\kappa(K,\bar{M}(c_2))$は $\dim(\psi)$に等しくなる。$\dim(\psi)$は Friedman が考察しているので、κ

$(K,\bar{M}(c_2))$が分かり①が実行された。

(2)の結果は、Kodaira dimension of moduli of stable sheaves on elliptic surfaces with a few singular fibers というタイトルの原稿にまとめ、2016 年 5 月現在投稿中である。

(3)得られた成果の国内外における位置づけとインパクトを表すため、本研究の新奇性について説明する。

①（1）研究開始当初の背景の項で説明したように、設定 2.1 の下で M の小平次元を求めた先行研究は存在しない。また、設定 2.1 の下では、先行研究の方法を真似ることで M の小平次元を求めることは期待できない。

② X が K3 曲面・Abel 曲面の場合を除くと、$M(c_2)$や$\bar{M}(c_2)$の特異点を考察した、特に、標準特異点か否かを考えた先行研究は存在しない。特異点が標準的であるための十分条件（定理 2.4）は特異点論に関する結果だが、このような方向の研究はないようである。層のモジュライ上の点が標準特異点であるための十分条件（系 2.5）も類似の方向の先行研究は存在しない。

③ 双有理幾何学の理論（飯高プログラム、森理論など）をモジュライ理論と明確に結びつけて解釈・翻訳した先行研究はほとんど存在しない。報告者は、飯高プログラムを定理 2.6 で考察した。森理論でフリップ等を使い多様体を改良するステップを、2009 年の論文(J. Math. Kyoto Univ.)で考察した。ただし、2009 年論文には特異点の考察（(2)研究の目的の項、問題(1)）がないことが課題になっていたので、その意味でも今回問題(1)を考察したことには意義がある。

(4) 今後の展望

① 定理 2.2 には条件「E_ηは、階数 1 の X_η-部分加群を持たない」がついているが、問題(1)を考察するためには、この条件を外すことを目指すべきである。

② 上記の結果は $M(c_2)$の特異点を考えているが、小平次元を計算するためにはそのコンパクト化$\bar{M}(c_2)$の特異点を考える必要がある。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Kimiko Yamada, Singularities and Kodaira dimension of moduli scheme of stable sheaves on Enriques surfaces, 査読あり、Kyoto J. Math., vol. 53, 2013, no.1, pp. 145--153.

〔学会発表〕（計９件）

① 山田　紀美子、Kodaira dimension of moduli of stable sheaves on elliptic surfaces with few singular fibers, 鹿児島大学談話会、2016 年 3 月、鹿児島大学（鹿児島県鹿児島市）.

② 山田　紀美子、Sigularities and Kodaira dimension of moduli of stable sheaves over an elliptic surface, 北海道大学代数幾何セミナー、2015 年 6 月、北海道大学（北海道札幌市）.

③ 山田　紀美子、Sigularities and Kodaira dimension of moduli of stable sheaves over an elliptic surface, 京都大学代数幾何セミナー、2015 年 5 月、京都大学（京都府京都市）.

④ Kimiko Yamada, Singularities on moduli scheme of stable sheaves of Elliptic surfaces, Algebraic Geometry Seminar, 2015 年 3 月、Univ. of California, San Diego (San Diego, USA).

⑤ Kimiko Yamada, Singularities on moduli scheme of stable sheaves of Elliptic surfaces, Algebraic Geometry Seminar, 2015 年 3 月、Univ. of Utah (Salt Lake City, USA).

⑥ 山田　紀美子、Singularities on moduli scheme of stable sheaves of Elliptic surfaces, 第 59 回代数学シンポジウム、2014 年 9 月、東京大学（東京都目黒区）.

⑦ 山田　紀美子、Toward understanding singularities on moduli of stable sheaves on elliptic surfaces, 第 3 回若手代数複素幾何研究集会、2014 年 1 月、松藤プラザ「えきまえ」いきいきひろば（長崎県長崎市）.

⑧ Kimiko Yamada, Singularities and Kodaira dimension of moduli scheme of sheaves on Enriques surfaces（ポスター発表）, Conference ``Algebraic and complex geometry'', 2012 年 9 月, Leibniz Universtat Hannover (Hannover, Germany).

⑨ 山田　紀美子、Singularities and Kodaira dimension of moduli scheme of sheaves on Enriques surfaces, 研究集会「高次元双有理幾何の周辺」、2012 年 6 月、京都大学 数理解析研究所（京都府京都市）.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等：なし

６．研究組織
(1)研究代表者
山田　紀美子（Yamada, Kimiko）
岡山理科大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70384170

(2)研究分担者：なし
(3)連携研究者：なし