# 科学研究費助成事業 研究成果報告書



平成 27 年 5 月 13 日現在

機関番号: 56203 研究種目: 若手研究(B) 研究期間: 2011~2014

課題番号: 23740039

研究課題名(和文) Abel商と非Abel商の比較

研究課題名(英文)Abelian and non-Abelian quotient

研究代表者

佐藤 文敏(satou, Humitoshi)

香川高等専門学校・一般教育科・准教授

研究者番号:20548309

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文): 以下の2つのことについて研究を行った。 一つ目は、は、複素多様体Xに単純Lie群Gが作用しているとき、XのGによる商X//G(非アーベル商)とGの極大トーラスT による商X//T(アーベル商)が考えられるが、この二つのorbifoldのorbifold cohomology環の関係を明らかにした。二 つ目は、射影直線への次数2、種数gの安定写像のモジュライにAtiyah-Bottの局所化定理を使うことによって、種数gの 安定曲線のモジュライのtautological環の新しい2つの関係式を求めるアルゴリズムを発見した。また、関係式の1つに ついては具体的な境界類での表現を求めた。

研究成果の概要(英文): We studied following two things. One is that we find an explicit relations between orbifold cohomology rings of non-abelian quotient X//G and abelian quotient X//T, where X is a complex manifold with an action by a semi-simple Lie group G and T is its maximal torus. The other one is that we find an algorithm to find two new relation in tautological rings of moduli stack of genus g stable curves by applying Atiyah-Bott localization theorem to a moduli stack of genus g stable maps to a projective line. We also carried out our algorithm to obtain one of two relations in terms of boundary classes explicitly.

研究分野: 代数幾何学

キーワード: 局所化定理 Gromov-Witten不変量 tautological環

## 1.研究開始当初の背景

本研究では以下の二つのことについての研究を行った。

一つ目は非アーベル商とアーベル商の cohomol goy に関する研究である。

複素多様体 X に単純 Lie 群 G が作用しているとき, Gによる商 X//G(非アーベル商)と G の極大トーラス T による商 X//T(アーベル商) が考えられる。1999 年の Martin 氏の論文 "Symplectic quotients by a nonabelian group and by its maximal torus "で、この2つの空間の cohomology 群を結びつける完全系列が発見され,この2つの空間の cohomology の比較についての研究が始まった。

特に、Xが複素ベクトル空間,Gがユニタリ 群のとき, 非アーベル商はグラスマン多様体 に、アーベル商は射影空間の積になる。この 2 つの空間の種数 0 の Gromov-Witten 不変量 を結びつける関係式が堀氏と Vafa 氏により 予想されていた。しかし,この予想は2つの 空間の量子 cohomology 環をそのまま比較す るものではなく超平面に対しての Mirror 対 称性と同様に , Gromov-Witten 不変量の母関 数として定義される」関数同士の比較公式で あった。そして,堀,Vafa氏らによるJ関数 についての予想が正しいことが Bertram, Ciocan-Fontanine, Kim 氏らの一連の論文 "Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa", "Gromov-Witten invariants for abelian and non-abelian quotients"で示 された。しかし、彼らの証明はグラスマン多 様体も射影空間も両方ともに良く知られた 空間であるため2つの空間の関連性を無視し て」関数を計算し、2つの」関数がちょうど 堀, Vafa 氏らが予想した通りの関係性を持つ ことを示した。したがって,一般の Abel 商 と非 Abel 商の J 関数の比較という堀-Vafa 予 想の一般化の方法についてはこの証明は何 も示唆しない。

もう一つは種数 g の点付き安定曲線のモジュライの cohomology に関する研究である。

1983 年の Mumford 氏の論文 "Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves" によってグラスマン多様体上の Schubert Calculusの類似として種数 g の点付き 安定 曲線のモジュライ空間の cohomology 環の部分環である tautological 環の交叉理論の研究が始められた。また物理の弦理論では弦の動く空間が複素構造を持つとき,弦のファインマン積分の計算が点付き安定曲線または安定写像のモジュライ空間の積分で表せることから点付き安定曲線のモジュライ空間の交叉理論が物理においても重要になってきていた。

複素射影多様体 X から 1 点への写像を考えることにより、種数 g の点付き安定写像のモジュライ空間から種数 g の点付き安定曲線のモジュライ空間への自然な射が誘導される。

このとき、この自然な射は cohomology 環に対しては、平坦引き戻しを引き起こす。したがって、種数 g の点付き安定曲線のcohomology 環の関係式はこの平坦引き戻しにより、X への種数 g の点付き安定写像のcohomology 環の関係式を与える。つまり、X の Gromov-Witten 不変量の関係式を与える。したがって、種数 g の点付き安定曲線のモジュライ空間の cohomology 環およびtautological 環の関係式を求めることは非常に重要である。

2005年に Graber, Vakil 氏らにより g+i 次 の tautological 類は i+1 個の有理曲線を成 分に持つ境界類で書き表せるということが 論文 "Relativevirtual localization and vanishing of tautological classes on moduli spaces of curves "で示された。し かし,彼らの証明は具体的にどう書き表せる かということについてはなんら助けになら ない抽象的な証明であった。したがってこの 時までに知られていた具体的に境界類で書 き表せる tautological 類は極, 限られたも のであり,またその証明も基本的には安定曲 線のモジュライ空間から各安定曲線に対し て Jacobi 多様体を対応させて全ての議論を 偏極 Abel 多様体のモジュライ空間に置き換 えて証明するというものしか根本的には知 られていなかった。したがって種数が2以下 の安定曲線のモジュライ空間の tautological 類の交点理論からわかるもの しか知られていなかった。

しかし,本研究代表者は共同研究者である Arcara 氏 と と も に , 2009 年 の 論 文 "Recursive formula for  $^{9}$ -  $^{1}$   $^{9}$ -1+・・・+  $_{g}$  in  $^{1}$   $^{1}$  において , 初めて任意の種数  $^{1}$   $^{1}$  において ,  $^{1}$  の関係式を与えた。さらに , この関係式は 他の関係式についての知識が必要のない完全なる帰納的な関係式であった。

また,この関係式の類似の関係式としてLiu, Pandharipande 氏は余次元 2g の関係式を 2011 年の論文 "New topological recursin relations"で与えた。

しかし, Liu, Pandharipande 氏らの関係式は佐藤-Arcara の関係式の導出と同じやり方で得られるものであった。

## 2.研究の目的

一つ目の研究についての最終目的はBertram, Ciocan-Fontanine, Kimらによって証明された堀, Vafa 氏らの予想を商がorbifoldになるときも含めて任意のXとGについて拡張することである。つまり,任意のXとGについて非アーベル商とアーベル商の種数 0 の orbifold Gromov-Witten 不変量の母関数であるJ関数の関係を求めることである。

その第一段階として任意のXとGに対して 非アーベル商とアーベル商の orbifold cohomology 環の環構造がどの様に関連付け られるかを求めることが第一段階の目的で ある。

二つ目の研究についての最終目標は共同研究者である Arcara と発見した種数 g の 1 点付き安定曲線のモジュライの tautological 環の関係式を求めた方法を拡張して新しい関係式を求めることである。

#### 3.研究の方法

一つ目の研究については先ず,任意の X と G の場合についての非アーベル商とアーベル商の orbifold cohomology がどの様な関係があるのかを求める。そのためにはそれぞれの空間のマルチセクターがどの様に対応しているのかを調べ、それぞれのマルチセクターにおいて G のどの正ルートに対応するベクトル束の Chern 類が orbifold cohomology の積構造のねじれに寄与しているのかを計算し、それを定式化する。

また,種数 0 の Gromov-Witten 不変量の間の関係式を求めるためには、非アーベル商とアーベル商のグラフ空間における固定点集合およびその法線束がどの様に対応しているのかを調べる必要がある。このとき,orbifold cohomology の積構造の比較した時と同様に,法線束の Chern 類が G のどの正ルートに対応するのかを調べる。

二つ目の研究については射影直線への次数 d,種数 gの n点付き安定写像のモジュライ空間に Atiyah-Bott の局所化定理を使い,tautological 環の新しい関係式を求める。このとき,一般には固定点集合の連結成分の数が多いのでこれを出来るだけ減らすように点の数と 類を掛ける組み合わせを上手く見つける。

## 4. 研究成果

一つ目の研究については、X のGによる商 X//G(非アーベル商)とX のG の極大トーラス T による商 X//T(アーベル商)の orbifold cohomology 環の積構造がどの様に関係しているのかを正ルートに対応する1次元のベクトル束の Chern 類を用いて具体的に定式化した。

二つ目の研究については種数gの安定曲線のモジュライの tautological 環の新しい2つの関係式を求めるアルゴリズムを発見した。

具体的には射影直線への種数 g、次数 2 の 5 点付き安定写像のモジュライにAtiyah-Botteの局所化定理を適応することによって種数 g の 2 点付き安定曲線のtautological 環の新しい関係式を求めるアルゴリズムを1つ求めた。また、同様に射影直線への種数 g、次数 2 の 4 点付き安定写像のモジュライに Atiyah-Botte の局所化定理を適応し、さらに上述の関係式と 2009 年の論文で示した関係式を組み合わせることによって種数 g の 1 点付き安定曲線のtautological 環の新しい関係式を求めるア

ルゴリズムを1つ求めた。現在,これらのアルゴリズムを実際に行い具体的な境界類での表現を求め、論文を執筆中である。

また、これらの方法は容易に次数3の場合にも拡張できる可能性がある。実際,射影直線への種数g、次数3の7点付き安定写像のモジュライに Atiyah-Botte の局所化定理を適応し,上述の3つの関係式と組み合わせることによって種数gの3点付き安定曲線のtautological環の新しい関係式を求めるアルゴリズムを既に1つ求めた。次数3のときは,次数2のときよりも固定点集合の連結成分の数は格段に増えるが原理的には次数2のときと同様にtautological環の新しい関係式を求めるアルゴリズムを発見できる可能性がある。

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に は下線)

## 〔雑誌論文〕(計 1件)

#### Fumitoshi Sato

"The Chow motive of relative Fulton-MacPherson space"

Math. Scand. Vol. 113, issue 1 (2013), 20-29

## 查読有

#### [学会発表](計 5件)

#### <u>佐藤 文敏</u>

"Topological recursion relations via degree two map"

リーマン面に関連する位相幾何学 東京大学

2014年

#### 佐藤 文敏

"Enumerative geometry of the moduli of genus 3 curves"

Branched Covering, Degenerations, and Related Topics

広島大学

2014年

## 佐藤 文敏

"Topological recursion relations" リーマン面に関連する位相幾何学 東京大学 2013 年

### 佐藤 文敏

"Topological recursion relations" アフィン代数幾何学研究集会 関西学院大学 2013 年

## 佐藤 文敏

"Enumerative geometry and differential equations"

山口大学理学部講演会 山口大学 2012 年

[図書](計 0件)

〔産業財産権〕 出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

http://research.kosen-k.go.jp/researcher-list/read0146163

- 6.研究組織
- (1)研究代表者

佐藤 文敏 (SATOU HUMITOSHI) 香川高等専門学校・一般教育科・准教授 研究者番号:20548309

- (2)研究分担者 無し
- (3)連携研究者 無し