

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740045

研究課題名(和文)特異点論を使った曲面論・低次元トポロジーの研究

研究課題名(英文)Surface theory and low-dimensional topology by using singularity theory

研究代表者

佐治 健太郎(Saji, Kentaro)

神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70451432

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文):特異点の判定法に関して、定義域と像域の次元が異なるモラン特異点に関して使いやすい判定法を示した。余階数1の写像芽に関して、特異点集合を特徴付ける関数の作り方を開発し、それを用いてモラン写像の遺伝子型と開折の条件を引き出した。また、ランフォイドカスプ辺に関して使いやすい判定法を作った。判定法の応用及び、特異点を持つ曲面の研究に関して、波面の内的な定式化である連接接束の概念を導入し、その実現性及び、閉曲面の波面についてガウス・ボンネ型の定理を示した。また、3次元球面内の曲面の双対性を用いてガウス写像が曲線となる曲面がカスプ辺と燕の尾特異点を持つ条件を明らかにし、特異点の条件の双対性を示した。

研究成果の概要(英文):This research was focused on two things. First one is criteria for singularities. About this, we got a useful criteria for Morin singularities where the dimensions of source and target are different. We made a method to construct functions which characterize the singular set of given map, and using it, we got conditions for Morin singularities. Moreover, criteria for rhamphid cusp is obtained. Second one is to investigate surfaces with singularity using criteria for singularities. We construct a notion "coherent tangent bundle", giving an intrinsic formulation for wave fronts. We show Gauss-Bonnet type theorem for it and give several other applications. Furthermore, using a duality between surfaces in 3-sphere, we study conditions for cuspidal edge and swallowtail of surface whose Gauss map is a curve. Moreover, we show duality of conditions of singularities.

研究分野：微分トポロジー

キーワード：特異点 特異点の認識問題 カスプ辺 ガウス写像

### 1. 研究開始当初の背景

数学的对象を研究する際、その特異点を調べるのが一つの正道である。特異点とは、他と異なっている点という意味であり、様々な数学の理論は特異点を調べているとすることができる。微分可能写像の特異点論は写像の特異点付近における振る舞いを調べる理論であり、ホイットニー、トムによって創始され、マザーによって'70年代前半までに整備された。そしてその後も発展が続いている。

研究開始当初、部分多様体の微分幾何学、接触幾何学やシンプレクティック幾何学、微分方程式の解、特異点を持つ図形の幾何学などにあらわれる特異性を微分可能写像の特異点としてとらえ、研究する手法が確立しつつあった。応募者は頻りに現れる特異点の判定法をつくり、各状況に応じて与えられた特異点を持つための条件を具体的に表示して幾何学的意味を調べることで、これらの研究を行ってきたが、これに対してさらに多くの特異点の判定法を作り、応用する必要性を感じていた。そこで研究代表者は、様々な特異点の判定法を新たにつくり、それを応用して様々な特異点を持つ幾何学的対象を調べるといふ本研究を行うことにした。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は大きく分けて2つあった。一つは様々な特異点の使いやすい判定法をつくることで、もう一つは本研究課題で新たに得られた、またはすでに得られている特異点の判定法を応用して、特異点をもつ幾何学的対象の性質を調べることである。特異点を持たない曲面について、曲面の様々な変換が定義されている。それらの変換は特異点を持つことがあるが、その特異点の違いはもとの曲面とその変換の幾何的性質を明らかにする。例えば平行曲面やガウス写像をとるといふこともそうであるし、近年、ルジャンドル双対性やリー球面幾何学等の文脈から様々な変換が考えられ、注目されている。判定法の応用は、このようなものに対して判定法を応用して新たな幾何学的性質を発見することが目的であった。使いやすい判定法を作ることは、まだ判定法が得られていない特異点に関して与えられた写像のジェットの情報のみを用いて計算できるような、判定法を作ることが目的であった。

### 3. 研究の方法

特異点の判定法に関して、まず特異点論を低次元の場合に特化することを考える。マザーの割り算定理を変数が2個の場合に限

定して強化した定理を作る。それを利用して特異点を持つ関数や多変数関数の特異点付近の高次の項の振る舞いをしらべ、判定法を作る。応用に関しては、すでにある変換や意味深いと思われる変換を考察したり、研究連絡・研究集会や文献を通して様々な変換の知識を得て、変換を考え、判定法を応用して特異点を調べる。特異点論及びその応用をテーマとして開催される国内・国外の研究集会に積極的に参加し、成果発表を行い、参加者からの助言やアドバイスを参考にし、他の研究者の発表も聞き、新しい研究情報を仕入れる。また、特異点論について深い知識を有する国内・国外の研究者を訪問し、研究連絡を重ねる。

### 4. 研究成果

特異点の判定法に関しては以下の結果を得た。

(1) 定義域の次元よりも像域の次元が大きいようなモラン特異点に対して判定法を作った。この場合はヤコビ行列が正方行列でないため、従来のような特異点集合を特徴付ける関数が得られないことから判定法はなかった。本研究では特異点を特徴付ける関数の組を構成し、それを使って判定法を書いた。その結果は関数の組の、写像の微分の核方向を与えるベクトル場による高階の微分を用いて現れており、目標であった与えられた写像のジェットの言葉のみを用いて特徴づけることができただけでなく、モラン特異点の特徴を反映する形に書かれている。応用として、線織写像にあらわれる特異点と、線織写像の締活線との関係について知られていた結果に簡単な別証明を与えた。さらに、写像芽に対して、A イソトピーなる概念を導入し、モラン写像の A イソトピー類の個数を調べ、個数は最大次数をもつモラン写像の A イソトピー類の個数は次元に関して4ごとに周期的となることを示した。

さらに (2,5)-カスプ辺と呼ばれる特異点に対して、使いやすい判定法を作った。この特異点は有限確定でないが、特異点上で微分写像の核を与えるベクトル場を特別なものにとることにより、かなり使いやすい条件を与えた。これはミンコフスキ空間内の平均曲率一定曲面の研究に応用されている。

特異点の判定法の応用に関しては以下の結果を得た。

(2) 3次元球面内の曲面とそのガウス写像について、双対性を利用してガウス写像が退化する場合の曲面の性質について調べた。そのような曲面は大円が動いてできる軌跡となるが、その曲面がカスプ辺と燕の尾特異点を持つ条件を明らかにした。さらに特

異点の条件の双対性を明らかにし、生成的特異点を決定した。

(3) 波面の幾何学に関して、多様体上のベクトル束と接続の概念を用いて、波面の内的な定式化である連接接束の概念を導入し、それが定曲率空間への超曲面の波面として実現できることを示した。またこれを用いて閉曲面の波面についてガウス・ボンネ型の定理を示した。もともとの波面とその双対に対してガウス・ボンネ型の定理を考えることにより、合計4つのガウス・ボンネ型の定理を得ることができ、これらを組み合わせると特異点を持たない曲面に対しても新しい結果を得ることができた。

(4) 特異点を持つ曲面に関して、ケンデリンク型の定理を示した。特異点を持つ曲面は一般にガウス曲率は発散している。しかし波面の性質を用いると、ガウス曲率測度を考えるとそれは定義されていることを示すことができる。また、特異点を持つ平面曲線にも同じことが言え、ケンデリンク型の定理を考察することができる。3次元空間型の場合に切り口と射影の特異点の概念を定式化して、測度のウェッジ積としてケンデリンク型の定理を示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Saji, Kentaro; Umehara, Masaaki; Yamada, Kotaro.  $S^2$ -singularities of hypersurfaces with non-negative sectional curvature in Euclidean space. *Kodai Mathematical Journal* 34 (2011), no. 3, 390-409.

Izumiya, Shyuichi; Nagai, Takayuki; Saji, Kentaro. Great circular surfaces in the three-sphere. *Differential Geometry and its Applications* 29 (2011), no. 3, 409-425.

Saji, Kentaro. Criteria for  $S^2$  singularities of wave fronts. *Tohoku Mathematical Journal* (2) 63 (2011), no. 1, 137-147.

Saji, Kentaro; Umehara, Masaaki; Yamada, Kotaro. Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts. *The Journal of Geometric Analysis* 22 (2012), no. 2, 383-409.

Saji, Kentaro. Koenderink type theorems for fronts. *Journal of Singularities* 10 (2014), 264-270.

Chen, Liang; Izumiya, Shyuichi; Pei, DongHe; Saji, Kentaro. Anti de Sitter horospherical flat timelike surfaces.

*Science China Mathematics* 57 (2014), no. 9, 1841-1866.

[学会発表](計9件)

佐治健太郎, 3次元球面内の大円織面の特異点, 部分多様体幾何とリー群作用 2011, 2011年9月2日, 東京理科大学 森戸記念館 (東京都)

佐治健太郎, 4次元多様体間の写像の臍特異点の判定法, 日本数学会 2012年度春季年会, 2012年3月27日, 東京理科大学神楽坂キャンパス (東京都)

佐治健太郎, 双曲空間内の定曲率線織面とその特異点, 特異点論と幾何構造, 2012年6月1日, 長野市生涯学習センター大学習室 1, (長野県)

Kentaro Saji, Criteria for singularities of low-dimensional stable map-germs and their applications, An international workshop in Singularity Theory, its Applications and Future Prospects, 2012年6月18日, リバプール大学, リバプール(イングランド)

Kentaro Saji, Singularities of surfaces swept by constant curvature curves, 12th International Workshop on Real and Complex Singularities, 2012年7月, サンパウロ大学サンカルロス校, サンカルロス(ブラジル)

佐治健太郎, 可微分写像の特異点判定法とその応用: 判定法, 2013年2月19日, 第7回 札幌・福岡幾何学セミナー, 北海道大学理学部5号館(北海道)

佐治健太郎, 可微分写像の特異点判定法とその応用: 応用, 2013年2月20日, 第7回 札幌・福岡幾何学セミナー, 北海道大学理学部5号館(北海道)

7 Kentaro Saji, Isotopy of Morin map-germs, Japanese - Brazilian Singularity Days, 2013年9月20日, サンパウロ大学 サンカルロス校, サンカルロス(ブラジル)

8 佐治健太郎, モラン写像芽のトポロジー, 位相幾何・微分幾何と特異点論の関わり, 2013年5月29日, 弘前大学創立50周年記念会館 岩木ホール(青森県)

9 佐治健太郎, カスプ辺の幾何的不変量, 大阪市立大学 数学研究所 微分幾何学セミナー, 2013年12月18日, 大阪市立大学 数学講究室(大阪府)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/saji/>

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐治 健太郎 (SAJI, Kentaro) 神戸大学・大学院理学研究科・准教授

様式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

研究者番号 : 70451432

(2)研究分担者

( )

研究者番号 :

(3)連携研究者

( )

研究者番号 :