様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１３７０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７４００４６
研究課題名（和文）量子不変量の結び目コボルディズムに関する位相的性質の研究

研究課題名（英文）Study on topological properties of quantum invariants concerning to knot cobordism

研究代表者
田中　利史（Tanaka, Toshifumi）

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号：６０３９６８５１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,700,000円、（間接経費）　510,000円

研究成果の概要（和文）：結び目の数学的な研究において，その分類及び応用を代数的または位相幾何学的な手法を用いて行った。その結果として，二つの結び目の関連性を，量子不変量とよばれる道具をもちいて，評価することができた。また，キャッソンハンドルや複素射影空間の無限個の連結和等の非コンパクト４次元多様体の微分構造の研究や空間グラフの研究への応用を接触幾何学と通して行い，それらの分類に関して，いくつかの成果を上げることができた。

研究成果の概要（英文）：In a mathematical investigation of knots, some studies for a classification of a knot and its application were done by using algebraic and topological methods. As a result, a relationship between given two knots has been investigated by using items called quantum invariants. As applications to the study of smooth structures of non-compact 4-manifolds (Casson handles, the connected sum of complex projective planes), and to the study of spatial graphs via contact geometry, some results concerning to the classifications have been obtained.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目コボルディズム　量子不変量　対称和　微分構造　スライス結び目　リボン結び目

１．研究開始当初の背景

Jones 多項式の発見以降量子不変量は爆発的な発展を遂げたが，その豊富さや有用性にも関わらず結び目コボルディズムの研究への応用はあまりない。

結び目コボルディズムの研究は 1960 年頃に Fox と Milnor の研究により注目を集めた。結び目コボルディズムとは結び目の集合に与えられる同値関係のことであり，その同値関係の同値類の集合を考えると，それは群の構造を許容する。この群は結び目コボルディズム群とよばれ，その単位元にあたるものがスライス結び目である。このスライス結び目は４次元球体に埋め込まれた円板の境界になり得る結び目であると定義される。また，逆元は結び目についてその鏡映をとる操作によって与えられる結び目が対応する。

本研究ではスライス結び目や結び目コボルディズム群を量子不変量の視点により捉え調べる。

このような研究は 1966 年の Fox と Milnor の論文においても見ることができる。その論文では以下のことが示されている。

定理. スライス結び目の Alexander 多項式Δはある多項式 F(t)に対しΔ(t)=F(t)F(1/t)となる。

その他のこのような研究として以下の５つの結果がある。

(1) 上の定理は Kirk と Livingston によりねじれ Alexander 多項式を用いた形で一般化されている。

(2) Kauffman は Conway 多項式と Arf 不変量との関係を導き出すことで Conway 多項式の 2 次の係数の偶奇性が結び目コボルディズム不変量であり，とくにスライス結び目に対しては偶数の値をとることを示している。

(3) 私は Kauffman 多項式の変数の一つの最大次数 d と極大 Bennequin 数との関連を調べ，特に交代結び目に対しては Kauffman 多項式のその次数 d が，結び目がスライス結び目であるかの判定に用いることができることを示した。

３次元球面内のリボン型特異点集合のみをもつ特異円板の境界である結び目は ¥underline{リボン結び目}とよばれる。リボン結び目はスライス結び目であることが知られている。

(4) Lamm はリボン結び目として知られている対称和の特徴づけを Alexander 多項式を用い行った。

(5) Eisermann はリボン結び目の結び目行列式の特徴づけを Jones 多項式を用いて行った。

リボン結び目以外のスライス結び目の例は現在まで知られていない。これに関する次の Fox による予想を解決することは，重要な問題の１つである。

予想. すべてのスライス結び目はリボン結び目である。

これはスライス - リボン予想とよばれているが，2 橋結び目の族やプレッツェル結び目のある族については正しいことが示されている。この予想を解決するためにはリボン結び目の性質を調べ特徴づけることが重要である。

２．研究の目的

低次元トポロジーの研究において代数的手法を用いて多様体の位相的性質を特徴づけることは基本的かつ重要な問題である。1960 年代に注目を集めた結び目コボルディズムの研究では，スライス - リボン予想をはじめ，これまでに数多くの重要で興味深い問題が考えられている。本研究では結び目の量子不変量の位相的性質を調べ，結び目コボルディズムの研究における重要な問題を解決することが目的である。

３．研究の方法

結び目の量子不変量の位相的性質を調べ，結び目コボルディズムに関する問題の解決を目標としている。そのために，私はスケイン理論を用いて、特に結び目の Jones 多項式がどのような位相的性質を反映しているかを導き，リボン結び目に関する重要な問題に取り組む。

また，研究対象として結び目のみでなく，４次元多様体や空間グラフも対象とし，量子不変量がそれらのどのような性質を表しているかを調べるため幾何学的な手法を用いる。

４．研究成果

この研究の目的は結び目のジョーンズ多項式等の量子不変量の，結び目コボルディズムに関する位相的性質を明らかにすることである。

(1) 結び目の対称和の研究：結び目の対称和のジョーンズ多項式の公式が得られた。この公式を詳細に調べることにより，その微分の－１及び虚数単位 I における値に関する特徴づけを行った。この研究については論文として作成し，学術論文誌に投稿済みである。

(2) アレキサンダー多項式の研究：私はこれまで結び目の量子不変量であるジョーンズ多項式やカウフマン多項式などを用いた結び目コボルディズムに関する結び目の分類の研究を行ってきた。一方，アレキサンダー多項式は結び目コボルディズムの分野で重要な性質をもつ量子不変量の一つとして古くより知られている。私は任意の素な結び目 K に対し，その結び目と同じアレキサンダー多項式をもつ素なサテライト結び目で，結び目群がすべて異なり，また結び目群が K の群への準同型を許容するような結び目の無限族を構成した。結び目群の間の写像の存在を調べることは，研究計画の目標１の後半に述べた結び目群の表現の性質を調べる際にも重要である。リボン結び目について，この手法を適用すると，アレキサンダー多項式が自

明なリボン結び目で，上で述べた性質を持つ結び目の無限族が構成できることが分かった。アレキサンダー多項式が自明な場合，リボン結び目からはじめて，この手法を用いてリボン結び目でない結び目がどのくらい構成できるかを調べることが今後の課題である。

(3) 結び目の正指数の研究：結び目コボルディズム不変量の一つである，Rasmussen 不変量の位相的性質の研究を行った。Rasmussen 不変量は正結び目の場合，上で述べた極大ベネカン数と同等であることが知られている。私は，与えられた結び目がどの程度正結び目に近いかを計る量として，結び目の正指数を定義し，この正指数の Rasmussen 不変量による評価式を示し，数多くの計算例を与えた。この研究については論文として作成し，大学紀要として発表済みである。

(4) 空間グラフの位相的性質の研究：次に空間グラフの量子不変量を用いた結び目コボルディズムに関する研究を行っている。その研究は結び目コボルディズムの研究において，結び目がリボン結び目かどうかを調べる際に重要な役割を果たすものであるが，これまで研究が進んでいない分野である。私は空間グラフのサイクルで表される結び目に注目しそのサーストン - ベネカン数を考えることにより空間グラフの性質を調べ，O'Donnol-Pavelescu の空間グラフの研究結果に関する具体例を、初めて構成することができた。さらに，その研究を通して空間グラフの不変量を定義した。すべてのサイクルの結び目のサーストン - ベネカン数が極大となるような埋め込みをもつとき，その空間グラフは mTB 極大であるとする。この性質は空間グラフの不変量である。上で構成した例は mTB 極大であるものである。一方で，私は mTB 極大でない例を手錠グラフの埋め込みとして構成した。さらに，空間グラフが mTB 極大でないための十分条件を元のグラフの性質により与えた。この研究については論文として作成し，学術論文誌に投稿済みである。

(5) 結び目のゴルディアン距離の研究：二つの結び目の関係を表す結び目のゴルディアン距離についての研究を量子不変量をもちいて行った。具体的には量子不変量であるジョーンズ多項式や Q 多項式，及びラスムセン不変量による評価式を示し，いくつかの計算例を与えた。この研究については論文として作成し，当該年度の大学紀要として発表済みである。

(6) ４次元多様体内のスライス結び目の研究を通して，非コンパクトな４次元多様体の微分構造の特徴づけを行った。その結果，複素射影空間の無限個の連結和にエキゾチックな微分構造を許容することが分かった。

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

1．（査読無）<u>Tanaka, Toshifumi</u> Signed Gordian distances, the Jones polynomial and Rasmussen invariant of knots, 岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第 38 巻, 5-14, (2014).

2．（査読無）<u>Tanaka, Toshifumi</u> Positive knots and Rasmussen's invariant, 岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第 37 巻, 1-5, (2013).

3．（査読無）<u>Tanaka, Toshifumi</u> An infinite family of prime satellite knots with the same Alexander polynomial, 岐阜大学教育学部研究報告（自然科学）第 36 巻, 1-4, (2012).

4．（査読有）<u>Tanaka, Toshifumi</u> AN INFINITE FAMILY OF CASSON HANDLES AND THE RASMUSSEN INVARIANT OF A KNOT, J. Knot Theory Ramifications 20 (2011), no. 9, 1229-1236.

〔学会発表〕（計６件）

1．<u>田中利史</u>,
On slice knots and smooth 4-manifolds, 第６回日本－メキシコ位相数学合同シンポジウム（同時開催），島根大学, 2013 年 9 月 2 日～9 月 6 日.

2．<u>田中利史</u>,
On the maximal Thurston-Bennequin number for knots in a spatial graph, 日本数学会トポロジー分科会, 京都大学, 2013 年 3 月 20 日～3 月 22 日.

3．<u>田中利史</u>,
On the maximal Thurston-Bennequin number for knots in a Legendrian graph, 研究集会「E－KOOK セミナー」, 大阪市立大学学術情報センター, 2013 年 2 月 14 日～2 月 16 日.

4．<u>田中利史</u>,
On the Jones polynomial of knots with symmetric union presentations, 研究集会「The 9th East Asian School of Knots and Related Topics」, 東京大学大学院数理科学研究科, 2013 年 1 月 14 日～1 月 17 日.

5．<u>田中利史</u>,
On the Thurston-Bennequin number of Legendrian graphs, 研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」, 鹿児島大学理学部, 2012 年 1 月 19 日（月）～21 日

6．<u>田中利史</u>,
On symmetry of the Jones polynomial of ribbon knots, The 3rd KOOK-TAPU Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics, 大阪市立大学, 2011 年 7 月 25 日（月）～29 日（金）.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　　田中　利史（Tanaka, Toshifumi）
　　岐阜大学・教育学部・准教授
　　研究者番号：６０３９６８５１

(2)研究分担者
　　　　　　　(0)

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　(0)

　研究者番号：