

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 28 日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740047

研究課題名(和文)可積分系と不可積分系の統計多様体の幾何学

研究課題名(英文)Geometry of statistical manifolds for integrable and non-integrable systems

研究代表者

松添 博 (Matsuzoe, Hiroshi)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90315177

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：統計多様体とは確率分布の集まり、すなわち統計モデルに則した幾何学構造を微分幾何学の視点から定式化したものである。統計モデルのなす統計多様体について、可積分系、非可積分系の幾何学構造を考察した。特に統計的推論で用いる推定関数を幾何学的な視点から考察することで、統計多様体の持つ自然な幾何学構造を解明した。さらに確率変数の独立性や期待値などを幾何学の視点から一般化し、確率変数の期待値と統計多様体の一般化した共形構造との関連などに関する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：The notion of statistical manifold is a differential geometric formulation of a set of probability distributions. For statistical manifold structures for statistical models, geometric structures are studied from the viewpoints of integrable and non-integrable systems. In particular, natural statistical manifold structures of statistical models are elucidated using geometry of estimating functions. In addition, the notions of expectations and independences are generalized from the viewpoint of differential geometry, and relations between expectations of random variables and generalized conformal structures of statistical manifolds are elucidated.

研究分野：幾何学

キーワード：統計多様体 捩れを許す統計多様体 アファイン微分幾何学 アファイン分布 情報幾何学 プレコン
トラスト関数 Tsallis統計 非可積分推定関数

1. 研究開始当初の背景

統計多様体とは、確率密度関数族に自然に定まる幾何学構造を微分幾何学の立場から一般的に定式化したものであり、Riemann 多様体上の双対的なアファイン接続が主要な役割を果たす。その基本は指数型分布族の統計的推論の幾何学であり、尤度関数の最大化手法が、ダイバージェンスの最小化と双対測地線によって、明快に説明される。

しかしながら、近年の複雑系科学や、隠れ変数を伴う統計的推論などでは、そもそも独立なデータの観測や、データからの尤度関数の記述が不可能である。古典的な統計学を離れた新しい統計手法が必要となり、それに伴う新しい幾何学が現れる。

(1). 複雑系科学や非平衡系物理学の発展から Tsallis 統計学が導入された。この統計学ではエスコート分布と呼ばれる確率密度関数と、エスコート分布に関する期待値である q -期待値が重要である。幾何学的には、統計多様体の (-1) -共形同値性と関係があることがわかっていた。しかしながら、一般の確率密度関数のエスコート分布の性質など、未解決の多くの問題が残っていた。

(2). また、独立な観測が得られない疑似尤度を用いた推定理論において、捩れを許す統計多様体の幾何学が適用できることが分かっていた。しかしながら、捩れを許す統計多様体の幾何学そのものがほとんど解明されていなかった。

2. 研究の目的

統計多様体の幾何学は、指数型分布族に自然に入る幾何学をモデルとして発展してきた。しかしながら、近年の複雑系科学に頻出するベキ型分布族の幾何学を理解するためには、統計多様体の一般化した共形構造や、射影幾何学を出発点とする可積分系理論が必要であると考えられる。また、隠れ変数を持つ一般化線形モデルの推定理論には、非対称な計量や、捩れを持つアファイン接続など、不可積分系の幾何学が必要であると考えられる。

本研究では、これらの統計多様体の幾何学の解明を目指す。さらに、可積分幾何学と不可積分幾何学の双方を同時に考えることにより、それぞれの幾何学の汎用性、特殊性なども議論する。

3. 研究の方法

(1). 研究の初年度に、具体的な統計モデルなどを用いて多くの具体例を構成し、その幾何学を検証する。その結果を参考に、統計多様体の幾何学理論を構成する。

(2). これまでの共同研究者である小原敦美氏(大阪大学)、逸見昌之氏(統計数理

研究所)らと連絡を取り、研究を遂行する。また、他分野で開催される研究会やセミナーなどにも積極的に参加し、関連分野の情報収集に努める。本研究は幾何学を中心として、統計学や統計物理学など複数の領域にまたがる内容である。そのため本研究遂行には、幾何学の研究者のみならず、それら専門家らとの情報交換、研究討論などが必要不可欠であると考えている。

(3). 本研究で取り上げる問題に関連した統計データは、地震の頻度や株価、または選挙の得票数などであり、非専門家でも容易に入手ができる。必要に応じて実社会の現象も参考にする。

4. 研究成果

統計モデルのなす統計多様体について、特に推定関数の幾何学の視点から可積分系、非可積分系の理論を統一的に議論することができた。

(1). 統計モデル、すなわち確率密度関数族のなす統計多様体について、推定関数の幾何学の視点から理論を構築した。可積分推定関数の場合には、統計モデルのなす統計多様体と、それを誘導するダイバージェンス関数との関連を解明した。非可積分推定関数の場合には、捩れを許す統計多様体と、それを誘導するプレ・コントラスト関数との関連を解明した。

(2). q -指数型分布族をはじめとする、変形指数型分布族の幾何学を考察し、変形指数型分布族が異なる2種類の双対平坦構造を持つことを示した。さらに変形代数を用いて推定量の一般化やその幾何学的特徴付け、確率変数の独立性や期待値の修正などを行い、統計多様体の一般化した共形構造との関連などを解明した。

(3). 変形指数型分布族に対する変形代数の概念を整理し、変形指数型分布族の標本空間に対する変形代数構造と、関数空間に対する変形代数構造を区別して与えた。その結果、擬加法的微分などの演算を定義して、変形指数関数が得られるための条件を与えた。

(4). 捩れを許す統計多様体の概念を拡張し、疑似統計多様体を定義した。さらに、疑似統計多様体の自明性の条件、すなわち疑似統計多様体が通常の統計多様体の変形として得られる条件を与えた。また、疑似統計多様体の幾何学とアファイン分布との関連を考察した。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 11 件)

- (1). Hiroshi Matsuzoe, *Information geometry of Bayesian statistics*, AIP Conf. Proc. **1641**(2015), 279-286. (査読有)
DOI: 10.1063/1.4905989
- (2). Hiroshi Matsuzoe, *Hessian structures on deformed exponential families and their conformal structures*, Diff. Geom. Appl. **36**(2014), Suppl. 323-333. (査読有)
DOI: 10.1016/j.difgeo.2014.06.003
- (3). Hiroshi Matsuzoe and Masayuki Henmi, *Hessian structures and divergence functions on deformed exponential families*, Geometric Theory of Information, Signals and Communication Technology, Springer, (2014), 57-80. (査読有)
DOI: 10.1007/978-3-319-05317-2_3
- (4). Hiroshi Matsuzoe and Masayuki Henmi, *Hessian structures on deformed exponential families*, Geometric Science of Information GSI2013, Lecture Notes in Computer Science, Springer, **5085**(2013), 275-282. (査読有)
DOI: 10.1007/978-3-642-40020-9_29
- (5). Hiroshi Matsuzoe, *Statistical manifolds and geometry of estimating functions*, Prospects of Differential Geometry and Its Related Fields, World Sci. Publ., (2013), 187-202. (査読有)
- (6). 松添博, 黒瀬俊, 捩れを許す統計多様体とアフライン分布の幾何学, 京都大学数理解析研究所講究録, **1834**(2013), 44-55. (査読無)
- (7). Shun-ichi Amari, Atsumi Ohara and Hiroshi Matsuzoe, *Geometry of deformed exponential families: Invariant, dually-flat and conformal geometry*, Physica A., **391**(2012), 4308-4319. (査読有)

DOI: 10.1016/j.physa.2012.04.016

- (8). Atsumi Ohara, Hiroshi Matsuzoe and Shun-ichi Amari, *Conformal geometry of escort probability and its applications*, Modern Physics Letters B, **26**, Issue 10 (2012), No. 1250063. (査読有)
DOI: 10.1142/S0217984912500637

〔学会発表〕(計 38 件)

- (1). Hiroshi Matsuzoe, *Geometry of Deformed Exponential families*, 機械学習における情報幾何学的視点 (Workshop: Information Geometry for Machine Learning), 理化学研究所 (埼玉県・和光市), 2014年12月3日~5日(招待講演)
- (2). 松添博, 統計多様体の共形構造, 統計多様体の諸分野への応用 (平成26年度京都大学数理解析研究所短期共同研究), 京都大学数理解析研究所 (京都市), 2014年11月19日~21日 (招待講演)
- (3). 松添博, 異常統計と統計多様体の一般化した共形構造, 量子系の統計的推測とその幾何学的構造 (平成26年度京都大学数理解析研究所研究集会), 京都大学数理解析研究所 (京都市), 2014年11月10日~12日 (招待講演)
- (4). 松添博, 異常統計モデルにおけるHesse構造, 福岡大学微分幾何研究会, 福岡大学 (福岡市), 2014年10月31日~11月3日
- (5). 松添博, 統計多様体の幾何学と異常統計, Mini Workshop on Information Geometry and Statistical Physics, 分子科学研究所 (愛知県・岡崎市), 2014年10月18日
- (6). 松添博, 異常統計と統計量の相対論的拡張, 第6回東海地区生物統計ネットワークセミナー, 名古屋大学 (名古屋市), 2014年10月1日
- (7). Hiroshi Matsuzoe, *Information geometry of Bayesian statistics*, The 34th International

- Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering (MaxEnt 2014), Chateau Clos Luce, Amboise (France), September 21- 26, 2014.
- (8). Hiroshi Matsuzoe, *Geometry of deformed exponential families*, The 4th International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Veliko Tarnovo (Bulgaria), September 8-12, 2014. (招待講演)
- (9). 松添博, 変形指数型分布族の幾何学と異常統計, 第61回幾何学シンポジウム, 名城大学(名古屋市), 2014年8月23日~26日(基調講演)
- (10). Hiroshi Matsuzoe, *Statistical manifolds on deformed exponential families and their applications*, International Conference on Statistical Physics (SigmaPhi 2014), Sheraton Rhodes Resort, Rhodes(Greece), July 7-11, 2014 (招待講演)
- (11). 松添博, 異常統計と変形指数型分布族の幾何学, 多自由度コロキウム, 名古屋大学(名古屋市), 2014年6月30日
- (12). 松添博, 変形指数型分布族上の統計構造, 幾何学セミナー, 名古屋大学(名古屋市), 2014年4月22日
- (13). Hiroshi Matsuzoe, *Statistical Manifolds in Affine Differential Geometry and Their Generalizations*, 2nd International Workshop on Information Geometry and Affine Differential Geometry, Shanghai Center for Mathematical Science, Fudan University, Shanghai (China), April 11-12, 2014 (招待講演)
- (14). Hiroshi Matsuzoe and Masayuki Henmi, *Hessian structures on deformed exponential families*, Geometric Science of Information 2013., Mines Paris Tech, Paris (France), August 28-30, 2013.
- (15). Hiroshi Matsuzoe, *Hessian structures on deformed exponential families and their applications*, Differential Geometry and its Applications 2013, Masaryk University, Brno (Czech Republic), August 19-23, 2013.
- (16). 松添博, 微分幾何学から見た統計モデルの幾何学, 電子情報通信学会・医用画像研究会「計算解剖学における数理モデルの深化と応用展開」, 東北大学(仙台市), 2013年7月19日~20日(特別講演)
- (17). 松添博, 統計多様体と推定関数の幾何学, 2013年度日本数学会・年会, 京都大学(京都市), 2013年3月22日(特別講演)
- (18). 松添博, 黒瀬俊, 捩れを許す統計多様体とアフライン分布の幾何学, 量子論における統計的推測の理論と応用(平成24年度京都大学数理解析研究所研究集会), 京都大学数理解析研究所(京都市), 2012年10月29日~31日
- (19). 松添博, *Statistical manifolds admitting torsion and pre-contrast functions*, 確率論と幾何学, 大学コンソーシアムやまがたゆうキャンパス・ステーション(山形県・山形市), 2012年10月19日~21日
- (20). 松添博, 小原敦美, 甘利俊一, 統計多様体の一般化した共形構造と q -指数型分布族の幾何学, 2012年度日本数学会・秋季総合分科会, 九州大学(福岡市), 2012年9月20日
- (21). 松添博, 黒瀬俊, 逸見昌之, 擬似統計多様体とアフライン分布の幾何学, 2012年度日本数学会・秋季総合分科会, 九州大学(福岡市), 2012年9月20日
- (22). Hiroshi Matsuzoe, *Geometry of deformed exponential families*, 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, St. Cyril and St. Methodius University of Veliko Tarnovo, Veliko

Tarnovo (Bulgaria), September 3-7, 2012
(招待講演)

- (23). Hiroshi Matsuzoe, *Quasi-statistical manifolds and geometry of affine distributions*, Pure and Applied Differential Geometry 2012 (PADGE2012), Katholieke Universiteit Leuven, Leuven (Belgium), August 27-30, 2012
- (24). Hiroshi Matsuzoe and Masayuki Henmi, *Statistical manifolds admitting torsion and pre-contrast functions*, The 8th World Congress in Probability and Statistics, Grand Cevahir Hotel & Convention Center, Istanbul (Turkey), July 9-13, 2012
- (25). Hiroshi Matsuzoe, *Construction of geometric divergence on q -exponential family*, International Conference Mathematics of Distances and Applications, Hotel Panorama, Varna (Bulgaria), July 2-5, 2012
- (26). Hiroshi Matsuzoe, *1-conformal flatness of q -exponential families*, International Workshop on Anomalous Statistics, Generalized Entropies, and Information Geometry, Nara women's university (奈良県・奈良市), March 5-9, 2012 (招待講演)
- (27). 松添博, プレコントラスト関数の幾何学, 統計多様体の幾何学とその周辺(3), 北海道大学(札幌市), 2011年12月2日~4日
- (28). Hiroshi Matsuzoe, Affine connections with torsion, Geometry Seminar, University of Michigan, Ann Arbor (USA), September 20, 2011 (招待講演)
- (29). Hiroshi Matsuzoe, Geometry of escort distributions, RIKEN Workshop on Information Geometry, 理化学研究所(埼玉県・和光市), August 31, 2011
- (30). 松添博, 擦れをゆるす統計多様体とアフ

ァイン分布の幾何学, 第 58 回幾何学シンポジウム, 山口大学(山口県・山口市), 2011年8月27日~30日(招待講演)

〔その他〕
ホームページ等
<http://matsuzoe.web.nitech.ac.jp/>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
松添 博 (MATSUZOE Hiroshi)
研究者番号: 90315177