様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　６ 月　８ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００４８

研究課題名（和文）測度距離空間の幾何学と最適輸送理論

研究課題名（英文）Geometry of metric measure spaces and optimal transport theory

研究代表者
太田　慎一（Ohta, Shin-ichi）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：００３７２５５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：測度距離空間のリッチ曲率の下限にあたる概念である曲率次元条件を2通りに変形したものを考え，その性質を明らかにした．変形の1つは次元の上限と解釈されるパラメータを負にするもので，従来の曲率次元条件よりも弱い条件となり，より広い空間に適用できる．
また，フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率を用いたBochner公式を確立し，その応用として熱流の勾配評価やCheeger-Gromollの分解定理の一般化を得た．

研究成果の概要（英文）：We consider two generalizations of the curvature-dimension condition, which is a notion of a lower Ricci curvature bound for metric measure spaces. One generalization is to make the parameter regarded as an “upper bound of the dimension” being negative. Then the condition is getting weaker and covers a wider class of spaces.
We also establish the Bochner formula for Finsler manifolds by using the weighted Ricci curvature. As applications, we obtain some gradient estimates for heat flow, and a generalization of Cheeger-Gromoll’s classical splitting theorem.

研究分野：微分幾何学

キーワード：リーマン幾何　曲率　熱流　フィンスラー幾何　勾配流

１．研究開始当初の背景

本研究が始まった 2011 年当時は，Sturm (2006) や Lott-Villani (2009) などによる測度距離空間の曲率次元条件と熱流の研究が進む中で，特に空間がリーマン的であることをどう捉えるか，また有限次元の曲率次元条件を熱流の解析にどう活用するかが重要な課題とされていた．一方，曲率次元条件を満たすリーマン的でない空間であるフィンスラー多様体では，重みつきリッチ曲率を用いたより豊かな幾何や解析の可能性が探られていた．以下，それらについて詳しく説明する．尚，[＊]は「5. 主な発表論文等」[雑誌論文] からの引用である．

(1) 距離空間上の確率測度のなす空間に，底空間の距離関数を用いて自然な距離構造（Wasserstein 距離）を入れたものを Wasserstein 空間と呼ぶ．測度距離空間の曲率次元条件 CD(K,N)は，N に応じて決まるエントロピー（Wasserstein 空間上の関数）が K に応じて決まる凸性の不等式を満たすこととして定義される．ここで N は次元の上限，K はリッチ曲率の下限と解釈され，実際にリーマン多様体とリーマン体積測度の組に対しては，CD(K,N)は次元が N 以下，リッチ曲率が K 以上であることと同値である．より一般に，体積測度に重みをつけた状況（重みつきリーマン多様体）では，CD(K,N)は重みつきリッチ曲率 Ric_N が K 以上であることと同値である．CD(K,N)からは，Bishop-Gromov 体積比較定理や対数ソボレフ不等式のような，多くの解析的，幾何学的性質が導かれる．一方で，各接空間に（Minkowski）ノルムが与えられた多様体であるフィンスラー多様体とその上の測度の組に対しても，適切に定義された重みつきリッチ曲率 Ric_N について，Ric_N が K 以上であることと CD(K,N)が同値であることが示された（Ohta (2009)）．これは曲率次元条件が広い空間に適用可能な汎用性の高い性質であることを表し，同時にリーマン多様体の極限のような空間を扱うには弱すぎることも意味する．（Cheeger-Colding の研究により，リーマン多様体の極限にフィンスラー多様体は現れない．）そこで，曲率次元条件に何らかの付加的条件を加えることで，フィンスラー多様体を排除してより強い性質を導けるものにするという方向性が議論されていた．

(2) ユークリッド空間における Jordan-Kinderlehrer-Otto (1998) の先駆的研究により，熱流を Wasserstein 空間内の曲線と見なすと，それは相対エントロピーの（Wasserstein 距離についての）勾配流と一致することが知られている．このような熱流の解釈はリーマン多様体（Ohta (2009) など）や，断面曲率が下から押さえられた距離空間である Alexandrov 空間（Gigli-Kuwada-Ohta [10]），またフィンスラー多様体（Ohta-Sturm (2009)）にも拡張される．CD(K,∞)は相対エントロピーの K 凸性として定義されるため，この勾配流としての解釈を通して熱流とリッチ曲率の深いつながりが理解できる．CD(K,∞)を満たすリーマン的な空間では熱流の Wasserstein 距離についての広がり方が K を用いて評価できる（K 収縮性，フィンスラー多様体では Ohta-Sturm [11] により成り立たない）．一方で，より強い有限の N での CD(K,N)は相対エントロピーとは異なるエントロピーを用いて定義されるため，CD(K,N)の下で熱流の振る舞いについてどのようなことが言えるかは，リーマン多様体の場合でもよくわかっていなかった．

(3) (1)で述べたように，フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率を下から押さえることは曲率次元条件と同値である．これにより曲率次元条件の一般論から様々な応用が得られるが，Ohta (2009) により導入されたフィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率の研究はまだ始まったばかりであり，曲率次元条件の一般論を越えて何が得られるかは明らかでなかった．

２．研究の目的

上で述べた状況の中，本研究の当初の目的は，大きく分けて

(1) 測度距離空間の曲率次元条件の研究を更に進め，またそれを Alexandrov 空間やリーマン多様体の極限空間などの研究に活用すること，

(2) フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率に関する研究，特に Bochner 不等式の確立とその解析的，幾何学的応用，

の 2 つであった．また，この双方に関連することとして，

(3) 凸関数の勾配流の研究

も視野に入れていた．上で述べたように，曲率次元条件を満たす空間の熱流は勾配流と見なせ，その研究で勾配流の理論は重要な役割を果たしている．一方，フィンスラー多様体上の凸関数の勾配流については殆ど研究がなく，特に定量的な評価は何も知られていなかった（これは現在でも重要な未解決問題である）．これらについて研究し，上の(1)や(2)の研究に応用することも，本研究の目的の 1 つであった．

３．研究の方法

研究開始当初から研究が進展していく中で実際に行った研究の方法を，「研究の目的」と同様に 3 つに分けて述べる．

(1)「1．研究開始当初の背景」(1)で述べた曲率次元条件をリーマン的なものに強化する研究については，Ambrosio-Gigli-Savare (2011) が曲率次元条件 CD(K,∞)と熱流の線形性を組み合わせたリーマン的曲率次元条件 RCD(K, ∞)を導入し，その後の Erbar-Kuwada-Sturm (2013) の有限次元版（RCD(K,N)）の導入などにより一気に研究が進んだ．現在までに，Gigli (2013) による Cheeger-Gromoll 型の分解定理，Mondino-Naber (2014) による構造定理などの重要な進展が次々と得られている．そこで本研究では，曲率次元条件の定義そのものに着目し，エントロピーを変えることで従来の重みつきリッチ曲率の下限とは異なる条件を導入，研究した．

また，「1．研究開始当初の背景」(2)で述べた有限次元の曲率次元条件の下での熱流の振る舞いについては，上で述べた Erbar-Kuwada-Sturm の研究により収縮性と勾配評価が得られた．そこでは関数の(K,N)-凸性という性質が導入され，相対エントロピーにそれを適用することで熱流の解析が行われた. 彼らの研究では N は正の実数としていたが，これを負の値にしても興味深い理論が展開できることに気づき，それを勾配流や曲率次元条件と結びつけて研究を行った.

(2) フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率については，Sturm との共同研究で Bochner 公式を確立し，それを用いて熱流の勾配評価などの解析的研究，分解定理などの幾何学的研究を行った.

(3) 勾配流については，共同研究者の Palfia の最適制御理論に基づくアイディアにより，曲率が下から押さえられた Alexandrov 空間などで弱凸関数の離散的な勾配流の研究を行った．曲率を下から押さえた状況では，連続な勾配流の研究は進んでいる一方で離散的な勾配流の研究には困難な点があったが，離散的な勾配流の構成方法を再考することでそれを克服した．また，曲率が正数で上から押さえられた空間も考え，非正曲率空間で知られている大数の法則などの拡張を目指した.

４．研究成果

本研究で得られた主な成果を，曲率次元条件の一般化に関するもの，フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率に関するもの，勾配流に関するものの 3 つに大きく分けて述べる.

(1) 曲率次元条件の一般化については，まず高津飛鳥氏との共同研究（[9],[14]）において，相対エントロピーを他のエントロピーに変えたときに，その凸性がどのように特徴づけられ，どのような応用が得られるかを調べた.相対エントロピーは統計力学や情報理論で基本的な役割を果たすボルツマン・シャノン・ギブス・エントロピーの符号を逆にしたものである．相対エントロピーは相互作用のない系を解析するのに有用なものだが，近年相互作用のあるより複雑な系を解析する方法として, Renyi-Tsallis エントロピーの研究が発展している．そこでこの Renyi-Tsallis エントロピーを含むエントロピーの族の凸性を考え，曲率次元条件との違いや共通点を調べた．このエントロピーは重みつきリーマン（またはフィンスラー）多様体に更に重みを乗せたものに対して定義される．エントロピーの凸性は底空間である重みつきリーマン多様体の重みつきリッチ曲率の下限と，その上の重み関数の凸性の組み合わせで特徴づけられる．また，エントロピーの凸性から対数ソボレフ不等式を変形したものや，多項式オーダーの測度の集中などが得られ，エントロピーの Wasserstein 空間での勾配流は多孔質媒質流を含む偏微分方程式の弱解と一致する.

上の研究で一般化したエントロピーの凸性を特徴づける際に，エントロピーに応じて重みつきリッチ曲率 Ric_N の N の値が変わり，N が負の値を取ることもあった．N が負の Ric_N が考えられたのはこれが初めてと見られる．[2]ではこれを発展させ，N が負の曲率次元条件 CD(K,N)を導入した. この場合でも CD(K,N)は Ric_N が K 以上であることと同値であり，Brunn-Minkowski 不等式や対数ソボレフ不等式などが得られる．N が次元の上限であるという解釈からは N が負の状況は不自然に思われるかもしれないが，ユークリッド空間上の凸幾何では対応する研究が既にある．[2]と同時期に E. Milman も N が負の Ric_N を独立に導入し，等周不等式の研究などを行っている.

(2) フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率に関しては，まず Karl-Theodor Sturm 氏との共同研究（[6]）で Bochner 公式を確立し，その応用として Bakry-Emery 型の勾配評価と Li-Yau 型の勾配評価及び Harnack 不等式を得た．Bochner 公式は幾何解析で最も重要な等式の 1 つであり，既に様々な応用がなされている．その 1 つとして，[3]では Cheeger-Gromoll 型の分解定理をフィンスラー多様体に拡張した．具体的には，重みつきリッチ曲率 Ric_N が非負であるフィンスラー多様体が実数直線の（大域的な）等長埋め込みを許容するとき，その多様体は 1 次元低い多様体と実数直線の直積に同相になる．この同相写像は測度も保つ．ノルム空間を考えればわかるように，フィンスラー多様体では距離は直積に分解されない．しかし，特別なフィンスラー多様体である Berwald 空間では，実数直線の方向にずらす 1 パラメータ変換群が等長写像からなることを示した．一般のフィンスラー多様体で同様の性質が成り立つかは未解決である.

この他に，ヒルベルト幾何，Funk 幾何と呼ばれる重要な負曲率フィンスラー多様体の重みつきリッチ曲率の具体的な計算（[8]），フィンスラー多様体の一般化としてのハミルトン系のリッチ曲率や熱流の研究（[4]）も行った．

(3) 最後に勾配流については，Miklos Palfia 氏との共同研究（[1]）で曲率が上または下から押さえられた距離空間上の弱凸関数の離散的な勾配流を調べた．離散的な勾配流は非正曲率空間（CAT(0)空間）ではよく調べられているが，断面曲率を下から押さえた空間（Alexandrov 空間）での研究は行われていなかった．[1]では，CAT(0)空間の場合とは異なる方法で離散的な勾配流を構成し，その性質を調べた．また，Sturm (2003) による CAT(0)空間での大数の法則を，曲率が正数で上から押さえられた空間や曲率が下から押さえられた空間に拡張した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 15 件）

[1] Shin-ichi Ohta, Miklos Palfia, “Discrete-time gradient flows and law of large numbers in Alexandrov spaces”, Calc. Var. Partial Differential Equations に掲載決定，査読あり．
DOI:10.1007/s00526-015-0837-y

[2] Shin-ichi Ohta, “(K,N)-convexity and the curvature-dimension condition for negative N”, J. Geom. Anal.に掲載決定，査読あり．
DOI: 10.1007/s12220-015-9619-1

[3] Shin-ichi Ohta, “Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature”, J. Reine Angew., Math. Vol. 700 (2015), 155-174，査読あり．
DOI:10.1515/crelle-2013-0011

[4] Shin-ichi Ohta, “On the curvature and heat flow on Hamiltonian systems”, Anal. Geom. Metr. Spaces, Vol. 2 (2014), 81-114，査読あり．
DOI:10.2478/agms-2014-0003

[5] Shin-ichi Ohta, “Examples of spaces with branching geodesics satisfying the curvature-dimension condition”, Bull. Lond. Math. Soc., Vol. 46 (2014), 19-25，査読あり．
DOI:10.1112/blms/bdt073

[6] Shin-ichi Ohta, Karl-Theodor Sturm, “Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds”, Adv. Math., Vol. 252 (2014), 429-448，査読あり．
DOI:10.1016/j.aim.2013.10.018

[7] Alexandru Kristaly, Shin-ichi Ohta, “Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications”, Math. Ann., Vol. 357 (2013), 711-726，査読あり．
DOI:10.1007/s00208-013-0918-1

[8] Shin-ichi Ohta, “Weighted Ricci curvature estimates for Hilbert and Funk geometries”, Pacific J. Math., Vol. 265 (2013), 185-197，査読あり．
DOI:10.2140/pjm.2013.265.185

[9] Shin-ichi Ohta, Asuka Takatsu, “Displacement convexity of generalized relative entropies. II”, Comm. Anal. Geom., Vol. 21 (2013), 687-785，査読あり．
DOI:10.4310/CAG.2013.v21.n4.a1

[10] Nicola Gigli, Kazumasa Kuwada, Shin-ichi Ohta, “Heat flow on Alexandrov spaces”, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 66 (2013), 307-331，査読あり．
DOI:10.1002/cpa.21431

[11] Shin-ichi Ohta, Karl-Theodor Sturm, “Non-contraction of heat flow on Minkowski spaces”, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 204 (2012), 917-944，査読あり．
DOI:10.1007/s00205-012-0493-8

[12] Nicola Gigli, Shin-ichi Ohta, “First variation formula in Wasserstein spaces over compact Alexandrov spaces”, Canad. Math. Bull., Vol. 55 (2012), 723-735，査読あり．
DOI:10.4153/CMB-2011-110-3

[13] Shin-ichi Ohta, “Barycenters in Alexandrov spaces of curvature bounded below”, Adv. Geom., Vol. 12 (2012), 571-587，査読あり．
DOI:10.1515/advgeom-2011-058

[14] Shin-ichi Ohta, Asuka Takatsu, “Displacement convexity of generalized relative entropies”, Adv. Math., Vol. 228 (2011), 1742-1787，査読あり．
DOI:10.1016/j.aim.2011.06.029

[15] Shin-ichi Ohta, “Vanishing S-curvature of Randers spaces”, Differential Geom. Appl., Vol. 29 (2011), 174-178，査読あり．
DOI:10.1016/j.difgeo.2010.12.007

〔学会発表〕（計 16 件）

[1] 太田 慎一,「曲率次元条件」,「リーマン的曲率次元条件にまつわる最近の進展」, 第63回 Encounter with Mathematics：最適輸送理論とリッチ曲率〜物を運ぶと曲率がわかる, 2015年2月20, 21日, 中央大学（東京都）.

[2] Shin-ichi Ohta, "Gradient flows of semi-convex functions on CAT(1)-spaces", ERC Workshop on Optimal Transportation and Aplications, 2014年10月27日, Pisa (Italy).

[3] Shin-ichi Ohta, "On the curvature and heat flow on Hamiltonian systems", 確率論と幾何学, 2013年8月10日, 京都大学（京都府）.

[4] Shin-ichi Ohta, "On Ricci curvature for Lagrangian/Hamiltonian systems", ERC Workshop on Optimal Transportation and Aplications, 2012年11月5日, Pisa (Italy).

[5] Shin-ichi Ohta, "Ricci curvature in Finsler geometry and applications", MSJ-KMS Joint Meeting, 2012年9月17日, 九州大学（福岡県）.

[6] Shin-ichi Ohta, "Ricci curvature in Finsler geometry and applications", The eighth China-Japan Friendship Conference on Differential Geometry, 2012年9月8日, Chengdu (China).

[7] Shin-ichi Ohta, "Ricci curvature in Finsler geometry and applications", The Fourth Geometry Meeting dedicated to the centenary of A. D. Alexandrov, 2012年8月23日, Saint-Petersburg (Russia).

[8] Shin-ichi Ohta, "Curvature-dimension condition and heat flow on metric measure spaces", 変分問題の展開−確率論と交錯する変分問題, 2012年6月12日, 京都大学（京都府）.

[9] Shin-ichi Ohta, "Ricci curvature bounds and heat flow on metric measure spaces", Colloquium, 2012年6月4日, Taipei (Taiwan).

[10] Shin-ichi Ohta, "Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature", Conference on Geometry, 2012年5月28日, 京都大学（京都府）.

[11] Shin-ichi Ohta, "Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature", Optimal Transportation and Differential Geometry, 2012年5月21日, Banff (Canada).

[12] 太田 慎一,「測度距離空間のリッチ曲率」, 日本数学会2012年度年会, 2012年3月27日, 東京理科大学（東京都）.

[13] 太田 慎一,「勾配流としての熱流」, 第九回浜松偏微分方程式研究集会, 2011年12月27日, 静岡大学（静岡県）.

[14] 太田 慎一,「フィンスラー多様体のリッチ曲率」, 日本数学会2011年度秋季総合分科会, 2011年9月29日, 信州大学（長野県）.

[15] 太田 慎一,「Bochner formulas on Finsler manifolds and applications」, 第58回幾何学シンポジウム, 2011年8月30日, 山口大学（山口県）.

[16] Shin-ichi Ohta, "Bochner formula on Finsler manifolds and applications", International Conference on Riemann-Finsler Geometry and Related Topics, in memory of the centenary birthday of S. S. Chern, 2011年6月26日, Hangzhou (China).

〔その他〕
ホームページ等
https://wwww.math.kyoto-u.ac.jp/~sohta

６．研究組織
(1)研究代表者
太田 慎一（OHTA, Shin-ichi）
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：００３７２５５８