

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740049

研究課題名(和文) オートマチック群の幾何とその境界の力学系的研究

研究課題名(英文) geometry of automatic groups and dynamics of the boundary

研究代表者

深谷 友宏 (FUKAYA, TOMOHIRO)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・講師

研究者番号：40583456

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：非可換幾何学の中心的な話題である，Baum-Connes予想の，非同変版と見なせる，粗Baum-Connes予想について研究している．これまでに，相対双曲群と呼ばれる群のクラスに対して，放物部分群に適切な仮定を設定した元で，同予想が成立することを証明した．さらに，距離空間の直積に良い境界を定義し，それを用いて，CAT(0)群，相対双曲群，polycyclic群の有限個の直積に対しても同予想が成立することを示した．

研究成果の概要(英文)：The Baum-Connes conjecture is one of the main topic of noncommutative geometry. We study its non-equivariant version, the coarse Baum-Connes conjecture. We proved that relatively hyperbolic groups satisfy the conjecture, under appropriate assumptions on parabolic subgroups. We also constructed a boundary for product of metric spaces. As application, we proved that the product of CAT(0)-groups, relatively hyperbolic groups, and polycyclic groups satisfy the conjecture.

研究分野：coarse geometry, geometric group theory

キーワード：Baum-Connes 予想 相対双曲群 境界 粗代数的位相幾何学 作用素環

1. 研究開始当初の背景

粗幾何学 (coarse geometry) では、非コンパクトな完備リーマン多様体や、語距離を入れた有限生成な無限群などの非有界な距離空間から、局所的な情報を捨て去り、「遠くから眺めたときに見えてくる構造」、これを粗構造 (coarse structure) と呼ぶ、に着目して研究する。非コンパクト完備リーマン多様体上の Dirac 型作用素は、一般に Fredholm 作用素には成らない為、整数に値を取る Fredholm 指数を定義できない。そこで Roe は Dirac 型作用素の「指数」を Roe 環と呼ばれる C^* 環の K 群として構成した。さらに Roe は Higson とともに、Dirac 型作用素を粗 K ホモロジーのサイクルと見なし、その指数を対応させる事により、Roe 代数の K 群への準同型写像を構成した。

これらはリーマン多様体とは限らない距離空間に対して定義され、また距離空間の粗構造にしか依らない。この準同型写像を、粗組み立て写像 (coarse assembly map) と呼ぶ。さて、粗 Baum-Connes 予想とは次のような主張である。

粗 Baum-Connes 予想

「良い」距離空間 Y に対して、粗組み立て写像は同型である。

粗組み立て写像は、正スカラー曲率を持つ計量の非存在 (Gromov-Lawson 予想) や、高次符号数のホモトピー不変性 (Novikov 予想) への応用が有る。なお、この粗 Baum-Connes 予想は、非可換幾何学の中心的な話題である Baum-Connes 予想の非同変版と見なせる。

Higson-Roe は、これまで Novikov 予想の研究などで用いられてきた、境界を使った手法を、粗幾何学の枠組みで再構成し、Gromov の意味での双曲空間に対して、粗 Baum-Connes 予想が成立することを示した。その後様々な研究が発展したが、G. Yu による、「Hilbert 空間への粗埋め込みが同予想を導く」という結果以降、新しいクラスの空間に対して成立が示されることがあまりなかった。

2. 研究の目的

粗 Baum-Connes 予想へのやや古典的と言える、境界を用いた手法と、代数的位相幾何学の道具を用いる手法を見つめ直し、新しいクラスの空間に対して、同予想が成立することを示す。

3. 研究の方法

相対双曲群や、それらの直積に対して良い境界を構成する。また、代数的位相幾何学の道具を粗幾何学に移植する。

4. 研究成果

最初の主要な結果は次の通りである。

G を有限生成群とし、 P を有限個の有限生成部分群から成る族とする。 G が P に関して相対双曲群であるとする。このとき、 P に属する全ての部分群に対し、

- (i) 粗 Baum-Connes 予想が成立する。
- (ii) Proper 作用の分類空間を実現するよい単体複体が存在する。

という条件を満たすとき G は粗 Baum-Connes 予想を満たすことを示した。

また、上述の条件を満たす相対双曲群に対し、粗 Baum-Connes 予想のコホモロジー版、すなわち、stable Higson コロナと呼ばれる C^* 環から粗コホモロジーへの写像 (粗余組み立て写像) が同型になることも示した。その際 n 必要とされた、粗コホモロジーの代数的位相幾何学的な性質

- ・ Mayer-Vietoris 型完全列
- ・ 粗ホモトピー不変性

を示した。

さらに、距離空間の直積空間に対し、良い境界を構成し、それが適切な意味で可縮であることを示した。

応用として、上記の条件を満たす相対双曲群、 $CAT(0)$ 群、Polycyclic 群の有限個の直積群に対しても粗 Baum-Connes 予想が成立することも示した。一般に $CAT(0)$ 群が Hilbert 空間に埋め込めるか分かっておらず、また相対双曲群と $CAT(0)$ 群の直積は相対双曲群にはならないので、この結果はこれまで知られている結果からは導くことができない。

また、Busemann 非正曲率空間に関しては、Bounded geometry という仮定の元では、粗 Baum-Connes 予想が成立するのだが、Higson-Roe, Willet の研究により知られていたが、我々は Busemann 空間の幾何学を用いて、この Bounded geometry という条件を外しても、同予想が成立することを示した。また、Bounded geometry という条件を満たさない測地的かつ Proper な Busemann 非正曲率空間の簡単な例を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

(1) T.Fukaya, S.Oguni Coronae of product spaces and the Coarse Baum-Connes conjecture, *Advances in Mathematics*, volume 279, 16 July 2015, Pages 201-233 (査読あり)

(2) T.Fukaya, S.Oguni The coarse Baum-Connes conjecture for Busemann non-positively curved spaces, to appear in *Kyoto Journal of Mathematics*. (査読あり)

(3) M.Asaoka, T.Fukaya, K.Mitsui, M.Tsukamoto Growth of Critical Points in One-Dimensional Lattice Systems, to appear in Journal d'Analyse Mathématique. (査読あり)

(4) T.Fukaya, S.Oguni Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups, Journal of Topology and Analysis, Vol. 4, Issue 1 (2012), 99-113. (査読あり)

(5) T.Fukaya, Euclidean cones of Sublinear Higson coronae, Tsukuba Journal of Mathematics, Vol. 36, Number 1 (2012), 67-77. (査読あり)

[学会発表](計 21 件)

深谷友宏, 直積空間の境界と粗 Baum-Connes 予想
日本数学会年会 幾何学学科会一般講演, 明治大学, 2015 年 3 月 24 日

深谷友宏, Coronae and the coarse Baum-Connes conjecture
Mini-workshop on Differential Geometry, 東北大学, 2015 年 3 月 19 日

深谷友宏, 幾何学的群論の紹介
数学の魅力, 東北大学, 2014 年 12 月 14 日

深谷友宏, Coarse Baum-Connes conjecture for product spaces
確率論と幾何学, 東京工業大学, 2014 年 9 月 24 日

深谷友宏, 直積空間の境界と Coarse Baum-Connes 予想
第 61 回幾何学シンポジウム, 名城大学, 2014 年 8 月 24 日

深谷友宏, 境界と Coarse Baum-Connes 予想
幾何学セミナー, 東北大学, 2014 年 6 月 17 日

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups,
ESI School and Conference Geometry and Quantization GEOQUANT 2013, Erwin-Schrödinger International Institute for Mathematical Physics (ESI), Vienna, Austria, August 27, 2013

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups,
Darboux seminar, Institut de Mathématiques, Université Montpellier 2, 18 Octobre, 2013

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
Séminaire d'Algèbre d'Opérateur, Institut de Mathématiques, Université Paris 7, 18 Avril 2013

T.Fukaya, Blow up of the boundary of relatively hyperbolic group
Rigidity school, 東京大学, 2013 年 1 月 8 日.

深谷友宏, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
幾何学セミナー, 名古屋大学, 2012 年 11 月 13 日

深谷友宏, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
幾何セミナー, 東北大学, 2012 年 10 月 9 日

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
The Eighth International Workshop on Differential Geometry, Fudan university, Shanghai, September 2012.

深谷友宏, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
幾何学シンポジウム, 九州大学, 2012 年 8 月 27 日

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
Topology and Functional analysis 2012 Fudan university, Shanghai, May 22 2012.

深谷友宏, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively hyperbolic groups
日本数学会年会, 東京理科大学, 2012 年 3 月 26 日

深谷友宏, Coarse Baum-Connes conjecture for relatively

hyperbolic groups
Group actions and K-theory, Kyoto
university, Kyoto, March 12 2012.

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes
conjecture for relatively
hyperbolic groups
The 4th GCOE International Symposium
on ``Weaving Science Web beyond
Particle-Matter Hierarchy'' Tohoku
universities, Sendai, February 21
2012

深谷友宏, Coarse Baum-Connes
conjecture for relatively
hyperbolic groups
General and Geometric Topology and
its Applications, Kyoto university,
Oct 18 2011.

T.Fukaya, Coarse Baum-Connes
conjecture for relatively
hyperbolic groups
4th Doctorial Forum of Mathematics
between Fudan and Kyoto Universities,
Fudan university, Nov 1 2011.

- 21 深谷友宏, 相对双曲群の
Mayer-Vietoris 完全列と Novikov 予想,
幾何学セミナー 九州大学, 2011 年 7 月
8 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.math.tohoku.ac.jp/~tomo/>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

深谷 友宏 (FUKAYA Tomohiro)
東北大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号 : 40583456

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し