

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 27 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740050

研究課題名（和文）超平面配置のトポロジーと組合せ論的構造：極小性とモジュライの観点からの研究

研究課題名（英文）Topology and combinatorics of hyperplane arrangements

研究代表者

吉永 正彦（YOSHINAGA MASAHIKO）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：90467647

研究成果の概要（和文）：超平面配置は組合せ論、表現論、トポロジー、代数幾何など数学の様々な分野で現れる共通の構造で、最近では統計学などでも使われている。超平面配置の様々な性質が組合せ論的に決定できるか、またどのように記述できるか、を問うことがこの分野の基本問題の一つである。吉永は局所係数ホモロジーに対して、極小性やモジュライ空間といった最近進展のあった知見を使って上記の問題を扱い、新たな局所係数ホモロジーの新たな計算方法、ミルナーファイバーの定性的性質、自由性の新たな特徴付けなどの結果を得た。

研究成果の概要（英文）：Hyperplane arrangements appear many branches of mathematics including combinatorics, representation theory, topology, etc. One of main problems is to decide to what extent the structures of arrangements are determined by the combinatorial structures. We have studied local system homology groups based on the recent developments of the irreducibility of the moduli space of line arrangements and minimal cell structures. We have obtained new algorithm computing local system homology, several qualitative results on the Milnor fibers and new characterization for the freeness.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学・複素多様体論

キーワード：超平面配置、自由配置、ミルナーファイバー、局所系

1. 研究開始当初の背景

超平面配置に付随した空間（補集合やミルナーファイバーなど）の幾何学的不変量が、超平面配置の組合せ論的性質で決定できるかどうかというタイプの問題が数多く論じられている。肯定的な結果としては、交叉半順序集合を使った Orlik-Solomon による補集合のコホモロジー環の記述や有向マトロイドの構造を使った Deligne や Salvetti によるホモトピー型の決定がある。一方、Rybnikov により、交叉半順序集合だけでは補集合の基本群は決定できないことが知られている。コホモロジー環や基本群の間で、どのような幾

何学的情報が交叉半順序集合の組合せ論的情報から決定できるかを明らかにすることは超平面配置研究の中心課題である。また、超平面配置の自由性が組合せ論的に決定できるであろうという「寺尾予想」も長らく未解決である。この問題は対数的ベクトル場の層という射影空間上の反射層の分裂を組合せ論的に特徴付ける問題であり、代数幾何的な側面とも関係している。

2. 研究の目的

超平面配置の補集合の局所係数コホモロジーは、超幾何関数を高次元化する際に使わ

れるなど、応用上も重要な研究対象であるが、組合せ論的に決定できるかどうかは分かっていない。超平面配置のトポロジーにおける重要課題である。局所係数コホモロジーの組合せ論的決定性は二次元の場合にも分かっておらず、これを証明、反例の両面から両面から研究を進める。超平面配置の自由性の自由性は制限の多重配置に自由性と密接にかかわっており、この観点から「寺尾予想」を視野に入れつつ自由配置の理解を深める。

3. 研究の方法

局所係数コホモロジーが組合せ論的に決定できない例があるとすれば、指定された組合せ論的構造を持つ超平面配置のモジュライ空間の非連結性と関係していることが知られている。局所係数コホモロジーの組合せ論的決定性に対する反例を探索するとなれば、次の二点が重要である(1)対応するモジュライ空間が非連結となる直線配置の構成、(2)局所係数コホモロジーの効率的な計算。

直線配置に対しては、このモジュライ空間は1994年に Jiang-Yau 等によって研究が始められていたが、2010年の Nazir-Yoshinaga の研究による進展があった。このため、モジュライ空間が非連結な直線配置の例が網羅的に構成できるようになった。これは(1)に関係している。また、吉永は以前から極小セル分割という特殊なセル分割を使った、実超平面配置の補集合のトポロジーの研究を続けており、これを二次元に特化することで、(2)の進展も見込まれる。これら最近の知見を用いることで、実直線配置の補集合に対して、(1)、(2)の難点を克服することができ、反例探しが大幅に進むことが見込まれる。反例が見つからない場合は、組合せ論的決定性が、既知の範囲よりも広い範囲で成り立っていることを意味するので、合理的な理由を探ることで、組合せ論的決定性に関する知見を深めることができる。

自由配置の研究に関しては吉永が2004年に行った「制限の多重自由性を使った自由性の特徴付け」を一般化する研究が Schulze や Abe らによって行われている。最近の進展を整理・統合することで、問題を整理し多重配置を使った自由性の研究の観点から寺尾予想にアプローチする。

4. 研究成果

(1) 上記方針に沿って、20本程度以下の多くのモジュライが非連結となる例を構成しそれらに対して、計算機による局所係数コホモロジーの計算を遂行したが、これまでの所、全ての例で組合せ論的に決定されていることが観察された。

(2) これまでの極小セル分割の研究を継続しておこない、基本群の特殊な表示である「極小正表示」を持つことを示した。「極小正表示」は全ての関係式が「長さの等しい二つの正のワードの等号」という特殊形をしている。これは組みひも群の表示と似た形をしており、基本群の定性的な性質を調べるための応用が期待できる。一つの応用として、群の語問題の可解性と同値な語の組合せ論的命題を定式化した。

(3) 極小セル分割の応用として、直線配置の補集合の局所係数コホモロジーを計算するアルゴリズム「共鳴バンド法」を考案した。このアルゴリズムは Chamber の隣接関係という実構造を使うため、実数体上で定義された直線配置にしか適用できないが、この場合には既存の計算方法よりも著しく効果的に局所係数コホモロジーが計算できることが分かった。例えば Deleted B3 配置と呼ばれている直線配置の局所係数コホモロジーの計算（より正確には、局所系のモジュライ空間である指標トーラスのなかで局所系コホモロジーが消えない局所系に対応する点の集合（特性多様体）の決定）に適用すると、これまでは計算機を使って行われていた計算が手計算で出来ることが分かった。局所係数コホモロジーが組合せ論的に決定できる直線配置のクラスが新たに見つかった。

(4) 上記「共鳴バンド法」を特殊な局所系に適用することで、直線配置のミルナーファイバーのベッチ数（正確にはホモロジー群のモノドロミー固有空間）を求めるアルゴリズムが得られる。このアルゴリズムは、実構造を使うが、直観的にも大変分かりやすい形をしており、ミルナーファイバーの定性的な性質を調べることに威力を発揮している。例えば、Libgober によって得られていた、無限遠直線上の交点の個数に関する性質を直ちに一般化することができ、モノドロミー固有値の重複度の新しい上限を与えた。また、A3配置がミルナーファイバーのモノドロミーの非自明性と無限遠直線上での交点の個数だけで特徴付けられることも分かった。

(5) 超平面配置の自由性に関しては2004年の吉永の研究以来、制限の多重配置の自由性を使った研究が盛んになされている。特に3次元の場合は、特性多項式と制限の多重特性多項が一致することにより、元の配置の自由性が示されることが分かっている。最近になって Schulze により、この結果は4次元に拡張されていたが、今回阿部拓郎氏（京都大学）との共同研究により、一般地毛で成り立つこと、さらに特性多項式全体は必要なく、二番目の係数だけ一致していれば十分であ

ることが分かった。これは2004年頃の知見では予想もできなかった強い結果と言える。

(6) 3次元超平面配置の自由性は、射影平面上のある種のベクトル束の分裂問題と同値である。「分裂問題」は代数幾何では古典的に良く研究されている。超平面配置の自由性の研究と分裂問題の間の類似性を明らかにする研究を行った。そのために、片方で知られていることを、もう一方に移すという作業をいくつかの結果に関して行った。これらは必ずしも新しい結果と言うわけではないが、問題を整理し、未解決問題の本質的な難点を明らかにする上で意味があると思われる。具体的には、(i) 超平面配置の自由性に関して「齋藤の判定法」として知られている判定法を、ベクトル束の分裂問題に対しても定式化した。(ii) ベクトル束の Chern クラスを大域切断の次元を使って記述する公式を得た。(iii) Yuzvinsky が「超平面配置のモジュライ空間の中で自由配置は Zariski 開集合をなす」ことを証明しているが、この事実に対して、別証明を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

①寺尾宏明, 吉永正彦, 超平面配置に関する最近の話題. 数学 2013 in press (査読有)

②M. Yoshinaga, Freeness of hyperplane arrangements and related topics. to appear in *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*. (2013) in press (査読有)

③ T. Abe, M. Yoshinaga, Free arrangements and coefficients of characteristic polynomials. To appear in *Mathematische Zeitschrift* (2013) in press (査読有)

④M. Yoshinaga, Minimal stratifications for line arrangements and positive homogeneous presentations for fundamental groups. *Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology*, 503-533, CRM Series, 14, Ed. Norm., Pisa, 2012. (査読有)

⑤M. Yoshinaga, Minimality of hyperplane arrangements and basis of local system cohomology. *Singularities in Geometry and Topology*, Strasbourg 2009, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics

Vol. 20 (2012), 345-362. (査読有)

⑥ M. Yoshinaga, Arrangements, multiderivations, and adjoint quotient map of type ADE. *Arrangements of Hyperplanes*---Sapporo 2009, ASPM (2012), vol. 62. 523-552. (査読有)

⑦Ko-Ki Ito, M. Yoshinaga, Semi-algebraic partition and basis of Borel-Moore homology of hyperplane arrangements. *Proc. A. M. S.* 140 (2012), 2065--2074. (査読有)

[学会発表] (計17件)

①M. Yoshinaga, Computational complexity of real numbers and \mathbb{Q} -recognition problems for periods, 数論幾何学セミナー, 北海道大学, 2012年11月29日

②M. Yoshinaga, 実超平面配置のミルナーファイバーについて, 大域解析セミナー, 熊本大学, 2012年11月16日

③Milnor fibers of real line arrangements, Free Divisors and Differential Equations. Tokyo University of Agriculture and Technology, 2012年11月7日

④M. Yoshinaga, 実超平面配置のミルナーファイバーについて, 幾何学コロキウム, 北海道大学, 2012年11月2日.

⑤ M. Yoshinaga, Milnor fiber of real arrangements, Seminario, Universidad Complutense de Madrid, スペイン, 2012年10月19日.

⑥ M. Yoshinaga, Introduction to Hyperplane Arrangements, The 12th International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics, 17 September, Jaca, Spain.

⑦M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements I, II, Seminario de Geometria y Topologia, Universidad de Zaragoza, スペイン, 2012年9月12日, 21日.

⑧M. Yoshinaga, Freeness of hyperplane arrangements and divisors (3 hours lectures), Arrangements in Pyrenees, University of Pau, France, 2012年6月11日~15日

⑨M. Yoshinaga, 直線配置のモジュライ空間

の連結性について、北海道大学数学教室談話会、北海道大学、2012年5月10日。

⑩ M. Yoshinaga, Minimal Stratifications for Line Arrangements, Extended root systems and fundamental groups, 東京大学 IPMU, 2012年2月13日。

⑪ M. Yoshinaga, Minimal Stratifications for Line Arrangements, 広島大学トポロジー・幾何学セミナー, 2011年11月15日。

⑫ M. Yoshinaga, What makes arrangements free? Hyperplane arrangements and applications, University of British Columbia, Vancouver, Canada, August 10, 2011.

⑬ M. Yoshinaga, Minimal Stratifications for Line Arrangements, Singularity theory conference, University of Science and Technology of China, Hefei, China, July 27, 2011.

⑭ M. Yoshinaga, 直線配置のトポロジー, 京都大学数学教室談話会, 京都大学, 2011年6月22日。

⑮ M. Yoshinaga, Characterizing Free Arrangements, Workshop on Free Divisors, Warwick, イギリス, 2011年6月3日

⑯ M. Yoshinaga, Minimal Stratifications for Line Arrangements, トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 2011年5月24日。

⑰ M. Yoshinaga, On the irreducibility of moduli spaces of line arrangements, Workshop on The Algebraic Geometry and Topology of Hyperplane Arrangements, Northeastern University, USA, 2011年4月8日。

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yoshinaga/jindex.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉永 正彦 (YOSHINAGA MASAHIKO)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：90467647

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし