

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740061

研究課題名(和文) 交代結び目に沿った例外的デーンス手術の完全分類に向けて

研究課題名(英文) Toward the complete classification of exceptional surgeries on alternating knots

研究代表者

市原 一裕 (ICHIHARA, Kazuhiro)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：00388357

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：3次元多様体とは、局所的に3次元の座標が設定できる空間のことであり、それら同士の相互関係について、結び目に沿ったデーンス手術とよばれる操作が注目され研究されてきた。特に「ただか有限個の例外を除いて双曲的結び目に沿ったデーンス手術によっては双曲的多様体が生成される」が示されてから、この有限個の手術は例外的デーンス手術とよばれ、深く研究されて来ている。実際、結び目理論との関連から、3次元ユークリッド空間内の結び目について、その分類に向けて研究が進められていた。本研究では、結び目理論の中で非常に良く知られ研究されている交代結び目に着目し、双曲的交代結び目に沿った例外的デーンス手術を完全に分類した。

研究成果の概要(英文)：A space locally modeled on the 3-dimensional Euclidean space is called a 3-manifold. To study their relationships, an operation called Dehn surgery has been focused and studied. Among the study, it was shown that there are only finitely many Dehn surgeries on a hyperbolic knot yield non-hyperbolic manifolds. Here a knot is called hyperbolic if its complement admits a hyperbolic structure. Now these finitely many exceptions are called exceptional surgeries, and have been studied in detail. In fact, related to Knot Theory, on hyperbolic knots in the 3-dimensional Euclidean space, the classification of exceptional surgeries have been studied. In the currently reported study, one of the most well-known and well-studied class of knots, called alternating knots, was concerned, and actually the complete classification of exceptional surgeries on hyperbolic alternating knots has been established.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3次元多様体論 デーンス手術

1. 研究開始当初の背景

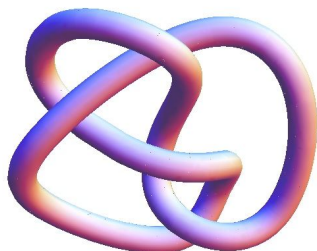
現代の幾何学および位相幾何学(トポロジー)における研究対象の一つである3次元多様体は、純粋な数学的興味に加えて、より素朴に我々が存在しているこの「宇宙の形」としての興味もあり、現在も盛んに研究が進められている。実際、百年以上にわたって未解決であった「ポアンカレ予想」、さらにその一般化である「幾何化予想」は、21世紀に入ってから革新的な手法により肯定的に解決された(G.ペレルマン(2002~2003))。この結果により、3次元多様体は、双曲的多様体とよばれるもの、ザイフェルト多様体とよばれるもの、およびそれらを貼り合わせて得られるもの、に分類されることがわかったのである。

一方、3次元多様体の相互関係の研究では、デーネ手術とよばれる「与えられた多様体から新しい多様体を生成する操作」が注目され研究が進められて来た。特に幾何化予想の提唱者であるW.サーストンによって「双曲結び目(補空間が双曲的多様体である結び目)に沿ったデーネ手術によって、双曲でない多様体が生成されるのは高々有限個」であることが示されてから、この有限個の手術は例外的デーネ手術とよばれ、盛んに研究が進められて来ている。

この例外的デーネ手術研究において、特に結び目理論との関連から、3次元ユークリッド空間内の結び目について、その分類に向けて研究が進められている。例えば、1995年にはM.ブリッテンハム-Y.Q.ウーによって2橋結び目とよばれる結び目に沿った例外的デーネ手術の完全分類が得られている。この2橋結び目を包含するクラスとして、結び目理論の中で非常に良く知られ研究されているものが交代結び目である。交代結び目に沿った例外的デーネ手術の研究は、これまで数多くなされて来ているが、本研究開始時点では、未だ完全分類には至っていなかった。

2. 研究の目的

上記の背景に基づき、3次元空間内の双曲的交代結び目に沿った例外的デーネ手術の完全分類を得ることを本研究の目的とした。ここで、結び目の射影図に沿って進んでみたとき、その交点において、上交差-下交差-上交差-下交差-...と交代的に交差点が現れる射影図を許容する結び目を交代結び目という。(下図参照)



3. 研究の方法

双曲的交代結び目(前図例参照)に沿った例外的デーネ手術に関して、M.ラッケンビーは、2000年に、交代結び目射影図のツイスト数というものを定義し、ツイスト数が9以上の交代射影図を許容する双曲的交代結び目は例外的デーネ手術を許容しないことを証明した。従って、本研究では、

(ステップ1)ツイスト数が8以下の交代射影図を許容する交代結び目の特徴付け

(ステップ2)それらの結び目に沿った例外的デーネ手術の分類

と大きく2つのステップに分けて研究を進めた。

ステップ1に関しては、まずラッケンビーの先行研究にもあるように、絡み目(複数の結び目の和集合)を用いての表示を、射影図の組み合わせ論的手法を用いてリストアップを行った。

ステップ2に関しては、ステップ1で得られた有限個の絡み目(およそ30000個)について、コンピューターを用いて例外的デーネ手術の分類を行った。実際には再帰的な計算が必要となったため、500万個以上の多様体について計算を行った。このため、大規模計算が必要になり、東京工業大学においてスーパーコンピューター(TSUBAME)を利用した。またそのためのコンピューターによる3次元多様体の双曲性の判定について、精度保証付き数値計算の専門的研究を行った。

4. 研究成果

(1)本研究の主目的であった双曲交代結び目に沿った例外的デーネ手術の完全分類を得ることが出来た。この結果は、論文「Exceptional surgeries on alternating knots」(正井秀俊氏(東京大学)との共著)としてまとめ、現在、投稿中である。また、「3.研究の方法」のステップ2で述べたように、最終的に完全分類を得るため、コンピューターによる3次元多様体の双曲性判定法について、精度保証付き数値計算の専門家と共同研究を行い、論文「Verified computations for hyperbolic 3-manifolds」(柏木雅英氏、高安亮紀氏、大石進一氏(早稲田大学)、N.ホフマン氏(メルボルン大学)との共著)としてまとめた(現在投稿中)。

(2)論文「Toroidal Seifert fibered surgeries on alternating knots」(鄭仁大氏(近畿大)との共著)では、交代結び目に沿ったトーラス的ザイフェルト多様体を生成する手術の完全分類を与えた。

(3)論文「Seifert fibered surgery and Rasmussen invariant」(鄭仁大氏(近畿大)との共著)では、近年盛んに研究されているコバノフホモロジーを基に定義されるラスマッセン不変量を用いた、ザイフェルト多様

体を生成する手術が存在する為の必要条件を与えた。その応用として、特殊な交代結び目である (p, q, q) 型プレツェル結び目に沿った例外的デーモン手術の完全分類を与えた。

(4) 論文「Exceptional surgeries on components of two-bridge links」では、交代絡み目の有名なクラスである二橋絡み目を取りあげ、その一つの成分に沿った例外的デーモン手術の完全分類を与えた。

(5) 論文「On the maximal number and the diameter of exceptional surgery slope sets」では、例外的デーモン手術の配置について研究し、その集合の最大個数と直径に関して、新たな知見を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 12 件)

以下、全ての論文について査読有。

1. Kazuhiro Ichihara and In Dae Jong, Toroidal Seifert fibered surgeries on alternating knots, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 90(3), 2014, 54-56.
DOI: 10.3792/pjaa.90.54
2. Kazuhiro Ichihara and In Dae Jong, Seifert fibered surgery and Rasmussen invariant, Contemporary Mathematics, 597, 2013, 321-336.
DOI: 10.1090/conm/597/11763
3. Kazuhiro Ichihara, Exceptional surgeries on components of two-bridge links, Archiv der Mathematik, 99(1), 2012, 71-79.
DOI: 10.1007/s00013-012-0403-1
4. Kazuhiro Ichihara, On the maximal number and the diameter of exceptional surgery slope sets, Proceeding of the Institute of Natural Sciences, Nihon University (日本大学文理学部自然科学研究所研究紀要), 47, 2012, 471-474.
URL:
http://www.chs.nihon-u.ac.jp/institute/nature/kiyou/2012/pdf/3_3.pdf

〔学会発表〕(計 18 件)

1. Kazuhiro Ichihara, Exceptional surgeries on alternating knots, The international Workshop on Numerical Verification and its Applications 2014, 2014.3.16, Waseda University, Nishi-Waseda Campus.
2. 市原一裕, Exceptional surgeries on alternating knots, トポロジーとコンピュータ 2013, 2013.12.2, 明治大学中野キャンパス.
3. Kazuhiro Ichihara, Exceptional surgeries on alternating knots, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics, 2013.1.5, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.
4. Kazuhiro Ichihara, Exceptional surgeries on Montesinos knots, Low dimensional topology and number theory IV, 2012.3.14, Graduate School of Mathematics, Kyushu University.
5. Kazuhiro Ichihara, Exceptional surgeries on components of two-bridge links, The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, 2012.1.12, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Korea.
6. 市原一裕, 例外的デーモン手術のコンピュータ援用研究, トポロジーとコンピュータ 2011, 2011.11.14, 名城大学名駅サテライト.
7. 市原一裕, Exceptional surgeries on components of two-bridge links, Intelligence of Low-dimensional Topology, 2011.5.27, 京都大学数理解析研究所.

〔その他〕

ホームページ等:

<http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~ichihara/ExcAlt/>
論文「Exceptional surgeries on alternating knots」の研究資料等を公開している

<http://www.oishi.info.waseda.ac.jp/~takayasuhikmot/>
論文「Verified computations for hyperbolic 3-manifolds」の成果であるプログラム等を公開している

6 . 研究組織

(1)研究代表者

市原 一裕 (ICHIHARA, Kazuhiro)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号 : 00388357