

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 5月 20日現在

機関番号：32689

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2011～2012

課題番号：23740062

研究課題名（和文） 3次元多様体の量子不変量のカテゴリー化

研究課題名（英文） Categorification of quantum invariants of 3-manifolds

研究代表者

伊藤 昇（ITO NOBORU）

早稲田大学・理工学術院・助教

研究者番号：10580160

研究成果の概要（和文）：当該分野の有名な未解決問題である「3次元多様体の量子不変量のカテゴリー化」に向けて有効な基礎理論を構築した。本問題では、紐から決まる量が2種類の変形操作をK1とK2で変わらない量を取り出すことがポイントであるが、主に次の結果を得た。

（1）K1は知られているカテゴリー化の次数のスライドに対応することを明らかにした。（2）K2で変わらない性質を満たすものを、知られているカテゴリー化の一般化の再構成から導いた。（3）（2）で構成した副産物として、基本的な幾何操作の新たな数学的記述を明確に与えた。

研究成果の概要（英文）：This study gave a fundamental theory contributing to attack the famous open problem: “Categorification of quantum invariants of 3-manifolds”. The key point to solve the problem is that we consider the possibility to define invariants under two kinds of operations, denoted by K1 and K2. The main three results are as follows. (1) We reveal that K1 corresponds to sliding grades of a known categorification. (2) We obtain the objects that are invariant under K2 by redefining a generalization of known categorification. (3) We gave an explicit description of a geometric operation derived from (2).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：低次元トポロジー

1. 研究開始当初の背景

結び目とは閉じた紐のことであり、紐が2つ以上有限個あるときは絡み目と呼ぶ。2000年前後から「結び目の量子不変量のカテゴリー化」という概念が盛んに研究されるようになった。結び目から決まる量の中でも「量子不変量」と呼ばれるものは物理と密接な関連があるものである。このような「結び目の量子不変量」にはジョーンズによって導入された量、ジョーンズ多項式が代表例としてある。ジョーンズ多項式は多項式であるが、2000

年頃、ホバノフにより、これらの係数をオイラー数とするホモロジーが構成された。これから新たなホモロジーによる結び目理論の展開が始まったのである。

2. 研究の目的

良い3次元の図形の数学名称である、「向き付け可能な閉3次元多様体（以下、単に3次元多様体と呼ぶ）」は、平べったい紐、すなわち帯状の結び目や絡み目で表示される。2つの3次元多様体が同値であることは、それぞれに対応する2つの結び目を使った表示

が、ある2種類の変形操作で移り合うことと同値である。このような2種類の変形操作で変わらない、紐で決まる量は専門用語では「3次元多様体の不変量」と呼ばれる。結び目の時と同様に、物理的な背景からある一定の考え方で組織的に得られる量は、やはり「量子不変量」と呼ばれ、中でもウィッテンによるものはよく知られている。本研究ではICMで紹介された、有名な未解決問題である「3次元多様体の量子不変量のカテゴリー化」と解くことを目標とした。その過程で、有用な基礎理論の構築を目指した。

3. 研究の方法

研究代表者は上記の2種類の変形操作に対してホバノフのホモロジーがどのような振る舞いをするか詳しく調べた。また、目標物の構成要素となると思われるものを改良した。より具体的に専門用語を用いて述べると、3次元多様体の量子不変量であるウィッテン・レシェティキン・トゥラエフ不変量を考え、対応する結び目の量子不変量であるジョーンズ多項式及びその一般化である色つきジョーンズ多項式を考察した。

4. 研究成果

(1) 具体的な成果の数学的内容

研究成果を具体的に述べるために、ジョーンズ多項式に対応したカテゴリー化であるホモロジー群を $\text{Kh}(J)$ 、色つきジョーンズ多項式を導く、研究代表者による新しいカテゴリー化を $\text{Kh}(CJ)$ と書き、上記の3次元多様体を変えない2種類の変形操作を K_1, K_2 と書くことにする。本研究により、主に次の3つの結果を得た。

[1] K_1 は $\text{Kh}(J)$ の次数がある規則でスライドすることに対応する。

[2] いくつかの $\text{Kh}(CJ)$ を足し上げたもの（直和）は K_2 で不変である。

[3] 1本の紐を n 重に平行に増やした $\text{Kh}(J)$ を生み出す、複体という専門用語で呼ばれる幾何的対象を $\text{CKh}(J, n)$ と書くとき、 $\text{CKh}(J, n)$ から $\text{CKh}(J, n-2)$ への関手（ある対象から別の対象に類似の構造を移すもの）を構成した。

(2) 研究代表者は谷山公規教授（早稲田大学教育学部）と2011年8月に研究集会「結び目の量子不変量とそのカテゴリー化」を開催した。これは本研究課題「3次元多様体の量子不変量のカテゴリー化」の最初のステップとして5人の研究者を招待し、講演して頂いた上で参加者により討論を行ったものである。この項ではその研究集会による成果を報告する。

講演者の高田敏恵准教授（九州大学）及び和久井道久准教授（関西大学）により、3次元多様体の量子不変量に関する基礎理論の解説を含む講演をして頂いた。講演は初歩から行われ、この分野の最先端で研究を行って

いる二人の講演者による総説を聞くことができ、研究課題に対して良い情報収集となった。

続く若手研究者の鮑園園氏（東工大）、荒金賢二氏（大阪市立大学）による、カテゴリー化分野における、結果や試みを紹介して頂いた。最先端の彼らの取り組みから、どのようなカテゴリー化のアプローチがあるか、幾何的視点及び代数的視点両面から考察でき、有益であった。

最後の講演者の石井敦助教（筑波大学）は、空間グラフのカテゴリーに関して講演を行った。本研究代表者は研究課題に取り組む際に空間グラフによるアプローチも考えていて、実際最終年度はグラフを使った方法で研究成果を得た。本講演はそれらの良い情報収集の場を与えた。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3件）

[1]（査読あり）Noboru Ito, Survey and Remarks on Viro's definition of Khovanov homology, RIMS Kôkyûroku, Bessatsu, B39, 2013, 9—19（掲載確定）.

[2]（査読あり）Noboru Ito, Jones polynomials of long virtual knots, J. Knot Theory Ramifications, **22**, 2013, 1350002, 17pp.

[3]（査読あり）Ayaka Shimizu, Noboru Ito, The half-twisted splice operation on reduced knot projections, J. Knot Theory Ramifications, **21**, 2012, 1250112, 10pp.

〔学会発表〕（計 17件）

[1]（招待講演）A case study on WRT invariant and Khovanov homology, Special Topology Seminar, Department of Mathematics, The George Washington University, 2013年5月.

[2]（招待講演）A case of the WRT invariant and Khovanov homology, Knots in Washington XXXVI, The George Washington University, 2013年5月.

[3]（招待講演）伊藤昇, Khovanov ホモロジー入門1、Categorification 勉強会 2013、東京大学、2013年3月.

[4]（招待講演）伊藤昇, Khovanov ホモロジー入門2、Categorification 勉強会 2013、東京大学、2013年3月.

[5] (招待講演) 伊藤昇, Khovanov ホモロジー入門 3、Categorification 勉強会 2013, 東京大学、2013年3月.

[6] (招待講演) Noboru Ito, Introduction to non-triviality of Gauss words, The Discrete Mathematics Seminar, University South Florida, 2013年2月.

[7] (招待講演) Noboru Ito, Introduction to Khovanov homology and Kirby moves, Topology Seminar, Department of Mathematics, The George Washington University, 2012年12月.

[8] (招待講演) Noboru Ito, Khovanov homology and Kirby moves, Knots in Washington XXXV, The George Washington University, 2012年12月.

[9] (招待講演) 伊藤昇, Invariants of curves on surfaces and knot invariants, リーマン面に関連する位相幾何学、東京大学、2012年9月.

[10] (招待講演) Noboru Ito, On Khovanov bicomplex and related problems, Topology Seminar, Department of Mathematics, The George Washington University, 2012年5月.

[11] (招待講演) Noboru Ito, Half-twisted splice on reduced knot projections, Topology Seminar, Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, 2012年3月.□

□[12] (招待講演) 伊藤昇, Chain homotopy maps for Khovanov homology and finite type invariants of nanophrases、コロキウム、立教大学、2011年11月.□

[13] (招待講演) 伊藤昇, Chain homotopy maps for Khovanov homology and finite type invariants of nanophrases、信州トポロジーセミナー、信州大学、2011年11月.

□[14] 伊藤昇, Remarks on nanophrases and Jones polynomials、東北結び目セミナー、東北大学、2011年10月.

[15] (招待講演) 伊藤昇, Khovanov homology for an unnormalized Witten-Reshetikhin-Turaev invariant、第58回トポロジーシンポジウム、筑波大学、2011年8月.

[16] Noboru Ito, Khovanov homology for an unnormalized Witten-Reshetikhin-Turaev invariant and 3-manifolds, Geometry of Transformation Groups and Combinatorics, RIMS Kyoto University, 2011年6月.□

[17] (招待講演) Noboru Ito, A relation between Khovanov homology and Kirby moves, Knots in Washington XXXII, The George Washington University, 2011年4月.

[図書] (計 件)

[産業財産権]
○出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
研究集会の主催
[1] 伊藤昇・谷山公規、研究集会「結び目の量子不変量とそのカテゴリー化」、早稲田大学早稲田キャンパス、2011年8月24日-8月26日.

研究集会のホームページ
http://www.waseda.jp/pr/j-knot_quantum/index.html

ホームページ等

<http://www.aoni.waseda.jp/noboru/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 昇 (ITO NOBORU)
早稲田大学・理工学術院・助教
研究者番号：10580160

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：